Материалы для проведения муниципального этапа Российской олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев, к.ф.-м.н. В. И. Луценко

Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий по математике.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

8 класс

1. Докажите, что число $2^6+2^5 19^3+2^4 19^3+2^3 19^6+2^2 19^6+19^9$ является составным?

Набросок решения.
$2^6+2^5 19^3+2^4 19^3+2^3 19^6+2^2 19^6+19^9=(2^2)^3+(1+2)2^4 19^3+(1+2)2^2 19^6+(19^3)^3 =(2^2+19^3)^3$ и, значит, данное число является составным, так как у него по крайней мере три делителя: 1, само число и 2^2+19^3.

2. Сколько существует натуральных чисел, больших единицы, произведение которых на свой наименьший простой делитель не больше 100?

Ответ: 33.

Набросок решения. Наименьший простой делитель может равняться 2. Это числа: 2, 4, …, 50 (25 чисел). Наименьший простой делитель может равняться 3. Это числа: 3, 9, 15, 21, 27, 33 (6 чисел). Наименьший простой делитель может равняться 5. Это число: 5 (1 число). Наименьший простой делитель может равняться 7. Это число: 7 (1 число). Так как 11×11=121>100, других простых делителей с таким свойством нет. Всего чисел: 25+5+1+1=33.

Критерии. Только верный ответ: 1 балл.

3. Целые числа a и b таковы, что $a^3/(a+b)$- целое. Доказать, что $b^4/(a+b)$ тоже целое.

Набросок решения. Заметим, что $(a^3+b^3)/(a+b) =a^2-ab+b^2$ – целое как алгебраическая сумма произведений целых чисел. Разность целых чисел - число целое, поэтому $(a^3+b^3)/(a+b)-a^3/(a+b) = b^3/(a+b)$ – целое. Произведение целых чисел - число целое, поэтому $b \times b^3/(a+b) = b^4/(a+b)$ – целое.

Критерии. Имеются верные выкладки, но нет словесных пояснений, почему они приводят к нужному результату типа: произведение целых чисел число целое:4 балла.

4. Клетки квадрата $n\times n$ покрасили в n цветов, по n клеток в каждый цвет. При каких n можно так раскрасить квадрат, что в каждом ряду и каждом столбце будут клетки ровно двух цветов?

Ответ: 2, 3, 4. Набросок решения. Примеры для 2, 3 и 4 показаны на рисунке справа. Цвета занумерованы числами.

1	2
2	1

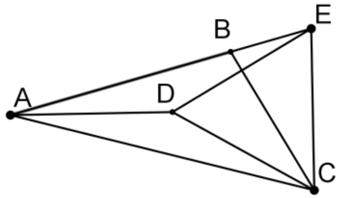
1	2	2
3	3	2
1	3	1

2	2	3	3
2	2	3	3
1	1	4	4
1	1	4	4

Оценка. Пусть $n\geq 5$ и удалось раскрасить квадрат нужным образом. Составим список цветов, встречающихся в рядах, в каждом должно быть ровно два цвета. Всего в списке будет $2n$ цветов. Каждый цвет должен встречаться не менее чем в двух рядах, т.к. если он только в одном ряду, а всего закрашено n клеток, то все клетки этого ряда одного цвета. Значит, они займут не менее $2n$ мест. Из этого следует, что в каждый цвет раскрашены клетки двух рядов, поскольку мест для их записи в рядах ровно $2n$. Рассмотрим первый столбец, в нём два цвета, а так как клеток не менее пяти, в какой-то цвет окрашено не менее трёх клеток. А значит, этот цвет встречается в трёх рядах, что противоречит доказанному ранее утверждению. Значит, при $n\geq 5$ раскраска невозможна. Случай $n=1$, очевидно, невозможен.

Критерии. Верный ответ с тремя примерами: 2 балла.

5. В треугольнике ABC $\angle A=30°$, $\angle B=105°$. На биссектрисе угла A взяли точку D так, что $\angle ADC=150°$. Доказать, что AD=BC.



Набросок решения. На продолжении стороны AB за точку B отметим точку E такую, что AC=AE. Так как AD – биссектриса угла, то $\angle DAE=\angle DAC=15°$. $\angle DCA=180°-\angle CAD-\angle ADC=180°-15°-150°=15°$. Следовательно ΔADC – равнобедренный (AD=DC). Треугольники ADC и ADE равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда CD=DE. $\angle CDE=360°-\angle ADC-\angle ADE=360°-150°-150°=60°$. Значит, треугольник CDE – равносторонний. Осталось заметить, что треугольник BCE – равнобедренный ($\angle CBE=\angle BEC=75°$). Имеем следующую цепочку равенств: AD=CD=CE=BC.

Критерии. Построена точка E: 1 балл.

Доказано, что треугольник CDE – равносторонний: 3 балла.

6. Каждую неделю по SMS-кам слушателей выбирают десять популярнейших песен. Известно, что 1) никогда не выбирают один и тот же набор песен в одном и том же порядке две недели подряд; 2) песня, однажды опустившаяся в рейтинге, в дальнейшем уже не поднимается. Какое наибольшее число недель могут продержаться в рейтинге одни и те же 10 песен?

Ответ: 46 недель.

Набросок решения. Пусть две недели подряд в списке был один и тот же набор из 10 песен. Так как порядок песен в них разный, то по крайней мере одна из песен в списке поднялась в рейтинге, и по крайней мере одна опустилась. Так как один раз опустившись, песня, в рейтинге не поднималась, подсчитаем суммарно возможное число подъёмов. Последняя песня в первоначальном списке могла подняться не более 9 раз, предпоследняя не более 8 раз и т.д. Значит, подъёмов не более 9+8+…+2+1=45. Значит, список может продержаться в рейтинге не более 46 недель.

Осталось привести нужный пример. Сначала песня, занимавшая первое место, опускается 9 недель до последнего места, затем вторая опускается 8 недель. Третья в начальном списке опускается 7 недель и т.д.