

8 класс

1. На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населённых пунктов А, В, С, D, Е. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от А до В равно 3 км, от В до С — 6 км, от С до D — 4 км, от D до Е — 5 км, а от Е до А — 6 км?

Ответ: может.

Решение. Например, населенные пункты находятся в таком порядке, если идти по часовой стрелке: А, С, Е, В, D и расстояния между ними в этом направлении равны $AC = 3$ км, $CE = 4$ км, $EB = 3$ км, $BD = 2$ км, $DA = 1$ км.

2. У Ани столько же орехов, сколько у Бори и Вовы вместе. У Ани и Бори вместе орехов вдвое больше чем у Вовы. У одного из них 43 ореха. Сколько всего орехов у них троих?

Ответ: 258.

Решение.

Пусть у Ани А орехов, у Бори – Б орехов, у Вовы – В орехов.

По условию $A = B + V$ и $2B = A + B$.

Тогда $2B = A + B = (B + V) + B$, получаем $V = 2B$.

$A = B + V = B + 2B = 3B$.

Замечаем, что В – чётно, А делится на 3. Значит $B=43$.

$A + B + V = 3B + B + 2B = 43 \cdot 6 = 258$.

3. Во дворе стоят 5 домов, в них живет 5, 15, 25, 35, 45 человек. Известно, что у каждого есть не менее двух тезок среди жителей двора. Докажите, что у кого-то есть тезка в своем доме.

Решение.

Допустим, всех людей, живущих в доме (45) зовут по-разному (то есть нет двух тезок, живущих в доме (45)). Так как у каждого из них есть минимум двое тезок, всего людей должно быть минимум $45 \cdot 3 = 135$. Но $5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 125$. Противоречие.

Значит в доме (45) есть тезки.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

Решение.

$\angle CDB = \angle EFB$, как соответственные при параллельных прямых AC и EF и секущей BD.

Так как $AD = AF$, то $\angle ADF = \angle AFD$, тогда $\angle CDB = \angle AFB$ как смежные к ним углы.

Получаем, что $\angle EFB = \angle AFB$. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABD = \angle CBD$.

Треугольники ABF и EBF равны по двум углам и стороне. Из равенства треугольников $AB = BE$.

5. У царя Гороха в молодильных яблоках завелся червячок. Всего яблок у него 13 и лежат они по кругу в специальной коробке Для-Молодильных-Яблок. Чтобы его найти царь Горох решил воспользоваться чашечными весами. Он знает, что все яблоки весят одинаково, но то яблоко, в котором сейчас находится червячок, тяжелее. Есть небольшая проблема, связанная с тем, что после каждого взвешивания яблоки надо возвращать обратно в коробку, каждое на то самое место, на котором оно до этого и лежало. А после того, как царь Горох возвращает яблоки в коробку, червячок сразу же незаметно переползает в одно из двух соседних с ним яблок (и живет там, пока не будет произведено следующее взвешивание). Помогите царю Гороху найти червивое яблоко. (То есть после какого-то взвешивания царь Горох перед тем, как положить яблоки в коробку, может точно определить яблоко, внутри которого в данный момент находится червяк. Минимизировать количество взвешиваний не нужно.)

Решение.

Пронумеруем яблоки по часовой стрелке. Соседними будут яблоки с номерами 1 и 2, 2 и 3, ..., 12 и 13, 13 и 1.

Взвесим 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Если равенство, то червячок находится в яблоке 13.

Пусть 1, 2, ..., 6 тяжелее.

Тогда после того, как яблоки будут положены назад и червячок куда-то переползет, он может

находится в одном из яблочек с номерами 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Взвесим 13, 1, 2, 3 и 4, 5, 6, 7.

Допустим 13, 1, 2, 3 – тяжелее.

После переползания червячок может находиться в одном из яблочек: 12, 13, 1, 2, 3, 4.

Взвесим 12, 13, 1 и 2, 3, 4.

Допустим 12, 13, 1 тяжелее.

После переползания червячок может находиться в одном из яблочек: 11, 12, 13, 1, 2.

Взвесим 11, 12 и 1, 2.

Если равенство, то червячок в яблочке 13.

Пусть 11, 12 тяжелее. Тогда после переползания червячок в одном из яблочек 10, 11, 12, 13.

Взвесим 11 и 12.

Если они не равны, то червячок в более тяжелом.

Иначе он в 10 или 13 и переползания в одном из 9, 11, 12, 1.

Взвесим 9 и 11.

Если неравенство, то червячок в более тяжелом. Иначе он в 12 или 1, после переползания в 11, 13 или 2.

Взвесим 11 и 13. Если неравенство, то он в более тяжелом. Если равенство, то в 1.