## 8-й класс

**8.1** Докажите, что если $ab(a+b)=1$, то $\dfrac{a}{a^3+a+1}=\dfrac{b}{b^3+b+1}$.

*Решение*. Например, можно действовать так:

$$\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{a}{a^3+a+ab(a+b)}=\frac{1}{a^2+1+ba+b^2},$$

$$\frac{b}{b^3+b+1}=\frac{b}{b^3+b+ab(a+b)}=\frac{1}{b^2+1+a^2+ab}.$$

Получилось одно и то же.

**8.2** Найдите все такие трехзначные числа N, что сумма цифр числа N в 11 раз меньше самого числа N.

*Решение*. Пусть a,b,c − цифры числа N: $N=100a+10b+c$, где $1\le a\le 9$, $0\le b,\ c\le 9$. По условию $100a+10b+c=11(a+b+c)$, т.е. $89a=b+10c$.

Следовательно, $89a\le 9+10\cdot 9=99$ и, значит, $a=1$. Тогда $10c\le 89$, т.е. $c\le 8{,}9$, но так как c − целое число, то $c\le 8$. Кроме того, $10c+9\ge 89$, т.е. $c\ge 8$. Таким образом, $c=8$. Остается найти b: $89=b+10\cdot 8$, $b=9$.

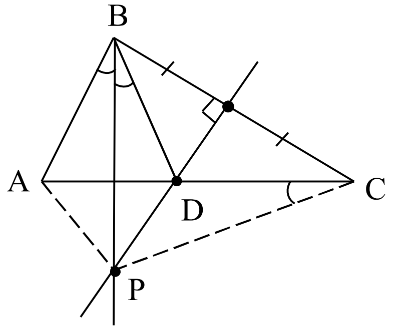
**8.3** Имеется 12 натуральных чисел. Известно, что сумма любых трех из них не меньше 100. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 406.

*Решение*. Расположим эти числа в порядке возрастания (точнее, неубывания): $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le \ldots\le a_{12}$. По условию $a_1+a_2+a_3\ge 100$, поэтому $3a_3\ge 100$, $a_3\ge \dfrac{100}{3}>33$. Поскольку $a_3$ − целое число, то выполняется неравенство $a_3\ge 34$. Тем более, $a_4\ge 34, a_5\ge 34,\ldots,a_{12}\ge 34$.

Но тогда $(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+\ldots+a_{12})\ge 100+9\cdot 34=406$.

**8.4** Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D, а биссектрису угла ABD − в точке P. Докажите, что точки A,B,C,P лежат на одной окружности.

*Решение*.




Треугольник PCD равен треугольнику PBD (по трем сторонам: DC = DB, PC = PB, PD − общая). Поэтому имеем: $\angle PCA=\angle PCD=\angle PBD=(\text{по усл.})=PBA$. Это означает, что точки A,B,C,P лежат на одной окружности (ведь отрезок AP виден из точек B и C под одинаковым углом).

**8.5** 8 школьников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся такие два школьника, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

*Решение*. Составим таблицу (матрицу) результатов − таблицу $8\times 8$: если, к примеру, школьник с номером 2 решил задачу с номером 5, то во второй строке этой таблицы в столбце с номером 5 запишем единицу, если не решил, то нуль. Т.о. в каждом столбце этой таблицы стоят 5 единиц и 3 нуля. Нам нужно доказать, что найдутся две строки, в которых единицы участвуют совместно во всех восьми столбцах.

Разберем два случая.

Случай 1: есть строка, в которой есть 6 единиц, предположим, в 1-м, 2-м, …, 6-м столбцах. Утверждается, что есть другая строка, в которой есть единицы в 7-м и 8-м столбцах. В самом деле, если бы каждая их этих 7других строк содержала не более одной единицы (на 7-м и 8-м месте), то получилось бы всего не более 7 единиц, в то время как 7-й и 8-й столбцы вместе содержат 10 единиц, а без учета исходной строки − не менее 8 единиц.

Случай 2: в каждой строке не более пяти единиц. Если бы в некоторой строке оказалось меньше 5 единиц, то общее количество единиц оказалось бы меньше, чем 40. (а, по условию, всего в таблице 40 единиц). Значит, в этом случае в каждой строке ровно 5 единиц.

Возьмем любую строку; для определенности пусть единицы стоят в столбцах с номерами 1,2,3,4,5. Утверждается, что найдется строка, в которой единицы стоят в столбцах с номерами 6,7,8. Предположим, однако, что такой строки нет. Тогда в каждой строке в столбцах 6,7,8 не более двух единиц. А всего в этих столбцах получается не более $7\cdot 2=14$ единиц (в исходной строке единиц в этих столбцах нет). Но, по условию, в этих трех столбцах всего $3\cdot 5=15$ единиц.