

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

8 класс

1. Ответ: $2019^{2021} \cdot 2021^{2019} < 2020^{2020} \cdot 2020^{2020}$.

Решение. Рассмотрим частное этих выражений:

$$\frac{2019^{2021} \cdot 2021^{2019}}{2020^{2020} \cdot 2020^{2020}} = \frac{2019^{2020} \cdot 2021^{2020}}{2020^{2020} \cdot 2020^{2020}} \cdot \frac{2019}{2020} = \left(\frac{2019 \cdot 2021}{2020^2} \right)^{2020} \cdot \frac{2019}{2020}.$$

Заметим, что последнее выражение имеет вид $\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n-1}{n}$, где каждый из множителей $\frac{n^2-1}{n^2}$ и $\frac{n-1}{n}$ при натуральных n положителен, но меньше 1. Тогда и произведение этих множителей положительно, но меньше 1. Значит, рассмотренное частное меньше 1, поэтому $2019^{2021} \cdot 2021^{2019} < 2020^{2020} \cdot 2020^{2020}$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, представление в виде разности или отношения дробей, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год

2. Ответ: да, верно.

$$\text{Решение. } \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c \Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b} - c \right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a \right) + \left(\frac{x-ca}{c+a} - b \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} + \frac{x-ca-cb-ab}{c+a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-(ab+bc+ca)) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 0.$$

Из условия следует, что второй множитель – положительное число, значит, $x - (ab + bc + ca) = 0 \Leftrightarrow x = ab + bc + ca$, то есть, x – целое число.

$$\text{Эту же идею можно реализовать иначе: } \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{a+b} - \frac{ab}{a+b} + \frac{x}{b+c} - \frac{bc}{b+c} + \frac{x}{c+a} - \frac{ca}{c+a} = a+b+c \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b+c} + \frac{x}{c+a} = \left(a + \frac{bc}{b+c} \right) + \left(b + \frac{ca}{c+a} \right) + \left(c + \frac{ab}{a+b} \right) \Leftrightarrow$$

$$x \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \Rightarrow x = ab + bc + ca.$$

Отметим, что попытки непосредственного умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой части приводят к очень громоздким преобразованиям.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

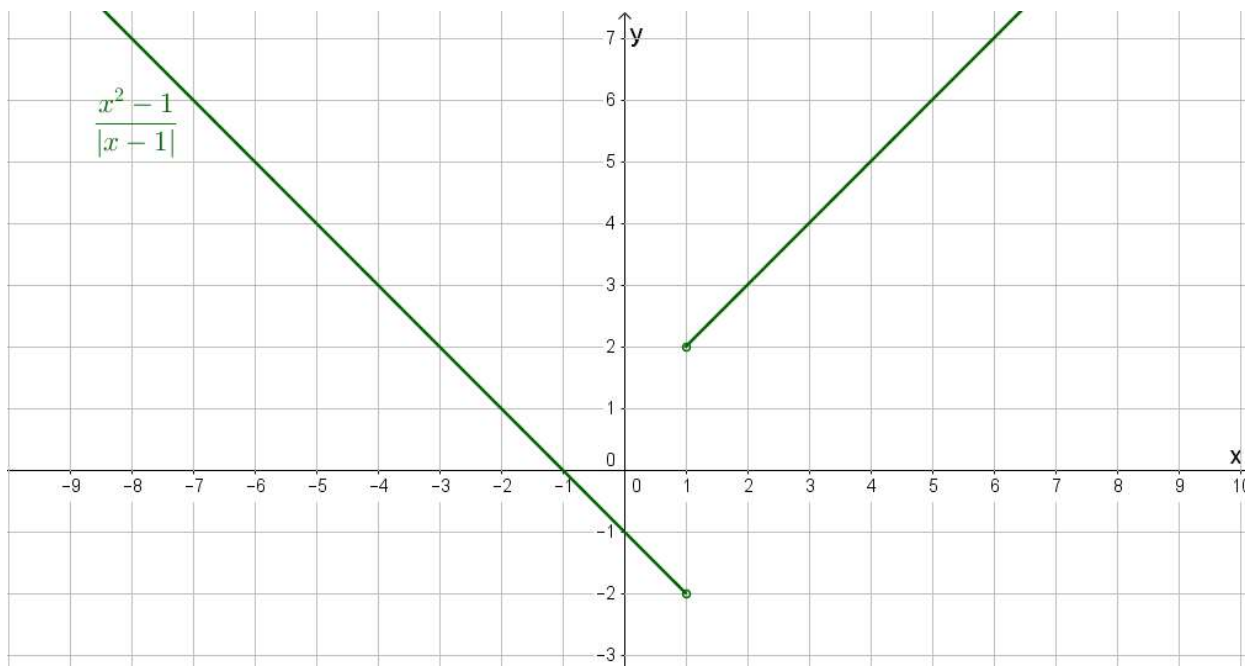
*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год*

3. *Решение.* Перепишем функцию y , раскрыв модуль:

если $x - 1$ – число положительное (т.е. если $x > 1$, то $|x - 1| = x - 1$ и $y = x + 1$;

если $x - 1$ – число отрицательное (т.е. если $x < 1$, то $|x - 1| = -(x - 1)$ и $y = -x - 1$).

Поэтому множество точек, удовлетворяющих заданному условию, состоит из двух лучей с выколотыми началами (см. рисунок ниже).



Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график линейной функции без учета модуля и/или области определения дроби.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

4. *Решение.* Воспользуемся свойством равнобедренного треугольника, согласно которому медиана, проведенная к его основанию, является биссектрисой и высотой (т.е. определяет его ось симметрии).

Найдем середину основания. Для этого используем свойством диагоналей параллелограмма (точкой пересечения делятся пополам). Построив на заданном отрезке, как на диагонали, параллелограмм, проведем его вторую диагональ и отметим точку пересечения (рис. 1).

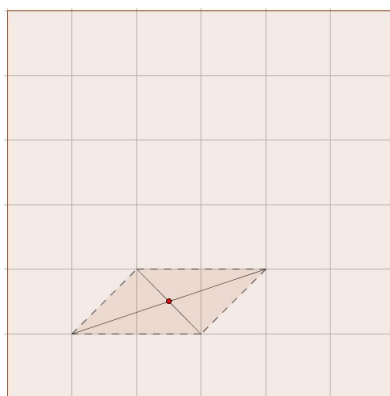


Рис. 1.

Через полученную точку проведем прямую, перпендикулярную заданному отрезку. Для этого заметим, как меняется положение прямоугольного треугольника при повороте на угол 90° (рис. 2а). Построим серединный перпендикуляр (рис. 2б,в).

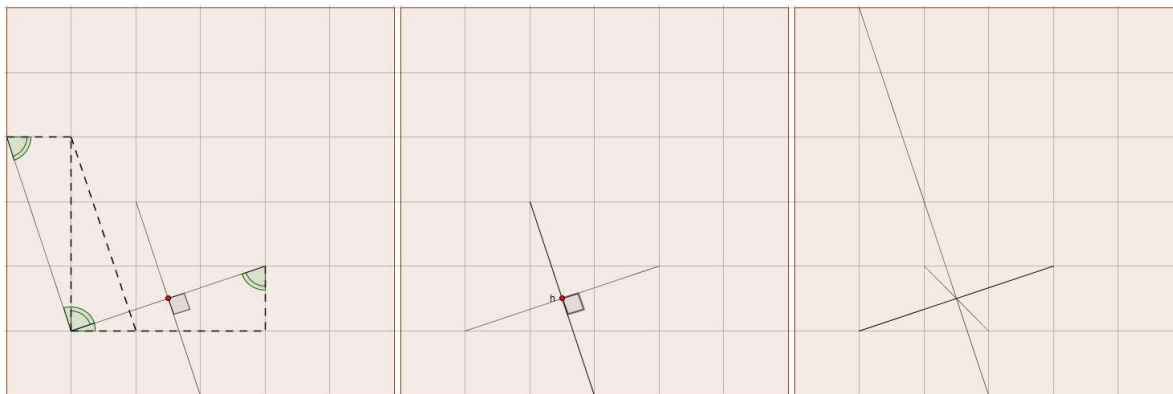


Рис. 2а.

Рис. 2б.

Рис. 2в.

Ясно, что две вершины искомого треугольника заданы, являются концами данного отрезка, а третья вершина лежит на построенном перпендикуляре. Поэтому возможны три варианта (рис. 3).

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год

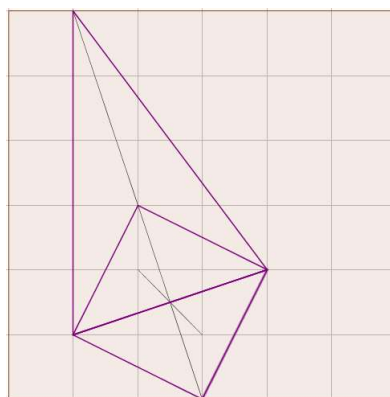


Рис. 3.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Найдены все возможные фигуры, удовлетворяющие требованию задачи. Некоторые из дополнительных построений не обоснованы.
3-4	Найдены все возможные фигуры, удовлетворяющие требованию задачи, однако их построение не комментируется.
1-2	Приведены 1-2 возможных варианта, построение которых не обосновано.
0	Решение отсутствует.

5. *Решение.* Трапеция – не параллелограмм. Поэтому, если Рома прав, то на доске нарисовано не больше одного параллелограмма, и Слава с Ваней оба неправы. Но по условию неправду сказал только один человек. Следовательно, это Рома, а Слава и Ваня сказали правду. Это значит, что по крайней мере один из трёх нарисованных на доске четырёхугольников одновременно является прямоугольником и ромбом, то есть квадратом.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное доказательство.
5-6	Доказательство содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для доказательства, но рассуждения содержат существенные ошибки или не доведены до конца.

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год*

1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательства не содержит.
0	Доказательство неверное, продвижения отсутствуют.