МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

Максимальное число баллов за одну задачу — 7, максимальное общее число баллов — 35

Продолжительность — 4 часа.

В каждой задаче требуется предъявить развернутое решение.

9.1. Какие различные значения может принимать цифра У в ребусе У·ЛАН + У·ДЭ = 2020? Обоснуйте ответ. (Одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные цифры – разными буквами.)

Ответ: два. У = 2, У = 5.

Решение: Вынесем общий множитель за скобку: У·(ЛАН + ДЭ) = 2020. Заметим, что У, Л и Э не равны 0.

Разложим правую часть на множители: 2020 = 1· 2 · 2 · 5 · 101. Так как У – цифра, рассмотрим все возможные её значения: У = 1, 2, 4, 5.

1) У = 1. Тогда ЛАН + ДЭ = 2020, но ЛАН + ДЭ < 999 + 99 = 1098 < 2020. Решений нет.

2) **У = 2**, ЛАН + ДЭ = 1010.

Есть 8 различных решений, например, **2·974 + 2·36 = 2020**

3) У = 4, ЛАН + ДЭ = 505. Очевидно, Л ≤ 5.

Л ≠ 5, т.к. иначе ЛАН ≥ 501, но тогда ДЭ не может быть двузначным числом.

Л ≠ 4, т.к. У = 4.

При Л = 3, АН + ДЭ = 205. Но АН + ДЭ ≤ 99 + 99 = 198 < 205. Решений нет.

4) **У = 5**, ЛАН + ДЭ = 404.

Есть 14 различных решений, например, **5·306 + 5·98 = 2020**

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

обоснованно найден только один ответ – 4 балла;

только ответ – 0 баллов.

9.2. Студент-предприниматель купил в аптеке несколько упаковок масок и продал их по более высокой цене сокурсникам с прибылью в 1000 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в аптеке маски (по той же цене, что купил и в первый раз) и продал их сокурсникам (по той же цене, что продал и в первый раз). На этот раз прибыль составила 1500 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Ответ: 2000 рублей.

Решение 1: Пусть упаковка масок в аптеке стоит x рублей, а продал студент маски по y рублей, и купил в первый раз a упаковок масок. Тогда, по условию, $a(y-x) = 1000$.

Вырученная сумма составила ay рублей, значит, во второй раз студент смог купить $\frac{ay}{x}$ упаковок масок. В этом случае прибыль составила $\frac{ay}{x}\cdot y - ay = \frac{ay(y-x)}{x}$ рублей. По условию, $\frac{ay(y-x)}{x} = 1500$.

Из двух полученных уравнений следует, что $\frac{1000y}{x} = 1500$, то есть $y = \frac{3}{2}x$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим $ay - ax = a\frac{3}{2}x - ax = \frac{ax}{2} = 1000$, откуда $ax = 2000$.

Решение 2: Пусть студент заплатил при первой покупке в аптеке за маски x рублей. Тогда он продал их за 1000+x рублей. Во второй раз он потратил x + 1000 + 1500 = x + 2500 рублей. Так как соотношение цен не изменилось, составим пропорцию: $\frac{x}{x+1000} = \frac{x+1000}{x+2500}$. Решив уравнение, получим x = 2000.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

6 баллов – верное решение с небольшими пробелами или отдельными невнятными местами;

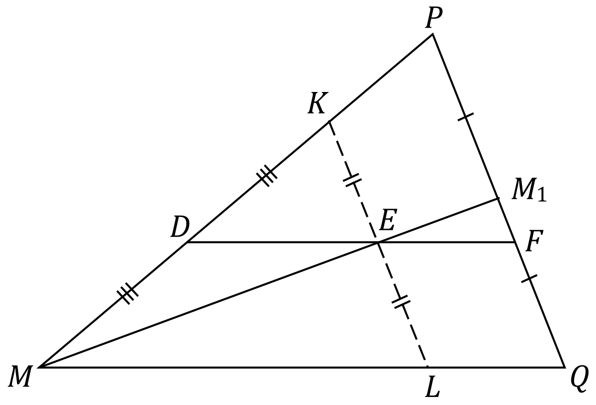
3 балла – верный ответ получен, исходя из рассуждений с конкретными числовыми данными;

1 балл – приведен верный ответ и проверено только, что он удовлетворяет условию;

только ответ или ответ с непонятными выкладками без пояснений – 0 баллов.

9.3. В треугольнике MPQ прямая, параллельная стороне MQ пересекает сторону MP, медиану MM_1 и сторону PQ в точках D, E и F соответственно. Известно, что $DE = 5$, а $EF = 7$. Чему равна длина MQ?

Ответ: 17.



Решение: Проведём через точку E прямую, параллельную PQ (K и L – точки пересечения этой прямой со сторонами MP и MQ соответственно). Поскольку MM_1 – медиана, то $LE = EK$, кроме того, $DF||MQ$, то есть DE – средняя линия треугольника MKL. Значит, $ML = 2DE = 10$. Кроме того, $EL||FQ$ и $EF||LQ$, следовательно, $LEFQ$ – параллелограмм, откуда $LQ = EF = 7$. Таким образом, $MQ = ML + LQ = 10+7 = 17$.

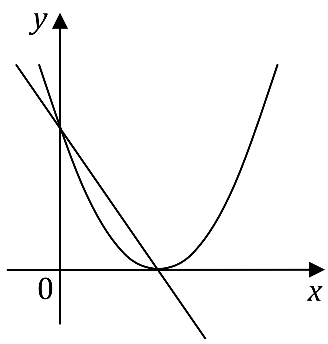
Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

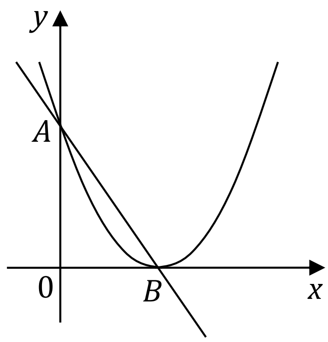
3-5 баллов – частично верное решение;

только ответ – 0 баллов.

9.4. На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функции, как показано на рисунке (одна из точек пересечения находится в вершине параболы), причем прямая $y = kx + b$ проходит через точку (–1; 2020), а коэффициенты a и c параболы $y = (x - c)^2$ – целые числа. Сколько различных значений может принимать коэффициент k? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.



Ответ: два. $k = -404; -1010$.



Решение: Заметим, что $k< 0$. Так как прямая проходит через точку (–1; 2020), то $2020 = -k + b$, откуда $b = 2020 + k$. Тогда уравнение прямой записывается в виде $y = kx + 2020 + k$.

Найдем точки пересечения прямой с осями координат.

т.A: $y_A = k\cdot 0 + 2020 + k = 2020 + k$. Тогда $A = (0; 2020 + k)$.

т.B: $0 = k\cdot x_B + 2020 + k$, $x_B = -\frac{2020+k}{k}$. Тогда $B = \left(-\frac{2020+k}{k}; 0\right)$.

Так как т. B – вершина параболы, то $c = -\frac{2020+k}{k} = -1 - \frac{2020}{k}$. Тогда парабола описывается уравнением $y = a\left(x + 1 + \frac{2020}{k}\right)^2$.

Так как парабола также проходит через точку A, то

$2020 + k = a\left(\frac{2020+k}{k}\right)^2$, откуда $a = \frac{k^2}{2020+k}$.Тогда, окончательно, уравнение параболы $y = \frac{k^2}{2020+k} \cdot \left(x + 1 + \frac{2020}{k}\right)^2$.

В силу того, что коэффициент c – целый, k должен быть делителем числа 2020. С учетом $k < 0$, возможны варианты k = –1, –2, –4, –5, –10, –20, –101, –202, –404, –505, –1010, –2020.

Коэффициент a – также целое число, а значит, k^2 должно делиться на 2020 + k, т.е. $k^2 \geq 2020 + k$, откуда k<–44, причём $k \neq 2020$, т.е. остается проверить –101, –202, –404, –505, –1010.

101^2 не кратно $1919 = 19\cdot101$.

$202^2 = 4\cdot101^2$ не кратно $1818 = 2\cdot9\cdot101$.

$404^2 = 16\cdot101^2$кратно $1616 = 16\cdot101$.

$505^2= 5^2\cdot101^2$ не кратно $1515 = 3\cdot5\cdot101$.

1010^2 кратно 1010.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

найдено выражение b через k – 1 балл;

найдено выражение c через k – 2 балла;

найдено выражение a через k – 2 балла;

последние три критерия могут суммироваться;

только ответ – 0 баллов.

9.5. Группа детей после муниципального этапа по математике, выстроилась в круг, обсуждая решенные задачи. При этом оказалось, что в круге стоит ровно 20 будущих призеров и ровно 25 будущих победителей муниципального этапа таких, что у каждого хотя бы один из соседей — это участник, не попавший ни в призеры, ни в победители. Докажите, что рядом с кем-то стоят два участника, не попавших ни в призеры, ни в победители.

Решение. Если среди стоящих в круге детей подряд стоят несколько участников, не попавших ни в призеры, ни в победители (далее будем их называть просто — участниками), выгоним их всех, кроме одного. Очевидно, это не повлияет на условия задачи. Теперь у каждого участника в соседях только призеры или победители. При этом о соседстве с простым участником заявили 45 детей. И это означает, что каждый простой участник учитывался в качестве соседа двух различных детей, и суммарное число подсчитанных соседей у простых участников должно быть четным, т.е. не может быть равно 45.

Критерии

7 баллов – полное верное доказательство;

3-5 баллов – частично верное продвижение в решении.