Материалы для проведения муниципального этапа Российской олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев, к.ф.-м.н. В. И. Луценко

Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий по математике.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

9 класс

1. Действительные числа *a*, *b*, *c* таковы, что $a+1/b=9$, $b+1/c=10$, $c+1/a=11$. Найти значение выражения $abc+1/(abc)$.

Ответ: 960.

Набросок решения. Перемножив уравнения, раскрыв скобки и сгруппировав, получим: $abc+1/(abc)+a+1/b+b+1/c+c+1/a=990$. Отсюда $abc+1/(abc)=990–9–10–11=960$.

2. В турнире по футболу участвуют 17 команд, причём, каждая играет с каждой ровно один раз. За победу команде начисляют 3 очка. За ничью -1 очко. Проигравшая команда очков не получает. Какое наибольшее число команд могут набрать ровно по 10 очков?

Ответ: 11.

Набросок решения. Оценка. Пусть n команд набрали ровно по 10 очков. В сумму очков входят все очки, набранные этими командами в играх между собой (минимум 2) и, возможно, в играх с другими командами: $10n\geq 2(n–1)n/2$. Откуда $n\leq 11$.

Пример: Все одиннадцать команд сыграли между собой вничью, а остальным проиграли.

Критерии. Только ответ, без обоснования: 1 балл.

3. Приведите пример трех различных целых чисел, одно из которых равно разности двух оставшихся, а другое – частному двух оставшихся.

Ответ: числа 2, –2, –4.

Числа подходят, так как 2= (–2)–(–4); –2=–4/2.

Замечание. Найти эти числа можно, найдя в целых числах одно из решений системы $\begin{cases} a = b - c \\ b = \frac{c}{a} \end{cases}$ или аналогичной.

Критерии. Правильная тройка без указания, как найдена: 7 баллов.

4. Даны три ненулевых действительных числа *a*, *b*, *c* такие, что уравнения: $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ имеют каждое два корня. Сколько отрицательных может быть среди корней этих уравнений?

Ответ: 2.

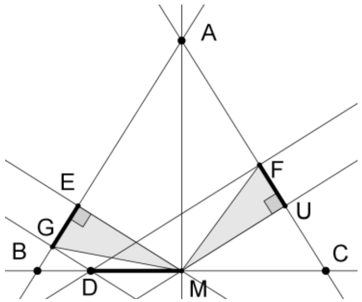
Набросок решения.

Если числа *a*, *b*, *c* заменить на противоположные, то «новые» уравнения будут иметь тот же набор корней, что и первоначальные. Возможны два случая: числа *a*, *b*, с одного знака; среди них есть положительные и отрицательные.

Первый случай. Ввиду первоначального замечания, можно считать, что они положительны. А ввиду циклической симметрии коэффициентов уравнений, можно считать, что $0<a\leq b$, $0<a\leq c$. Перемножив эти неравенства, получим $a^2\leq bc<4bc$. Из этого неравенства следует, что дискриминант уравнения $cx^2+ax+b=0$ отрицателен, и уравнение корней не имеет. Случай невозможен.

Второй случай. Ввиду первоначального замечания и циклической симметрии коэффициентов уравнений, можно считать, что $0<a$, $0<c$, $b<0$. Из этих неравенств следует, что в уравнениях $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ произведение корней отрицательно и, значит, ровно один корень отрицателен. В уравнении $ax^2+bx+c=0$ произведение корней положительно и сумма положительна, значит, оба корня положительны. В итоге имеем два отрицательных корня.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На прямой BC отметили точку D. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на боковые стороны, равноудалены от середины основания.



Набросок решения. Пусть M – середина основания BC. Проекции точек D и M на сторону AC обозначим F и U соответственно. Проекции точек D и M на сторону AB обозначим G и E соответственно. Так как в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой, точка M равноудалена от боковых сторон: MF=MU. Поскольку основание наклонено к боковым сторонам под равными углами, то проекции отрезка DM на боковые стороны равны: GE=FU. Прямоугольные треугольники MEG и MUF равны по двум катетам. Значит равны и их гипотенузы: MF=MG.

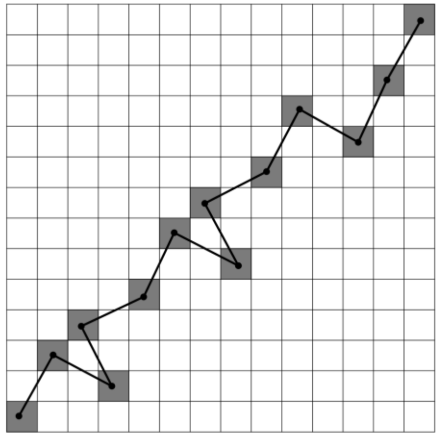
Критерии. Правильно рассмотрен только случай расположения точки D на основании BC: 3 балла.

6. Несколько полей доски 14×14 отмечены. Известно, что никакие два отмеченных поля не находятся в одном и том же столбце и одном и том же ряду, а также, что конь может, начав с некоторого отмеченного поля, обойти все отмеченные поля несколькими прыжками, побывав в каждом ровно один раз. Каково наибольшее возможное количество отмеченных полей?

Ответ: 13.

Поскольку в каждом ряду не более одной отмеченной клетки (поля), то отмеченных клеток не более 14. Пусть отмеченных клеток 14. Занумеруем строки и столбцы числами от 1 до 14 снизу вверх и слева направо и раскрасим клетки в черный и белый цвет в шахматном порядке, причём, для белых клеток сумма строки и столбца, в которых находится клетка, нечётна, а для черных - чётна. Пусть путь коня по отмеченным клеткам (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), …, (x_{14}, y_{14}). Рассмотрим сумму $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+\ldots+(x_{14}+y_{14})$. Поскольку конь меняет при каждом ходе цвет клетки, в сумме будет семь нечётных слагаемых и, значит, она нечётна. С другой стороны, в каждой строке и столбце конь побывал один раз, и сумма равна $2(1+2+3+\ldots+14)$ и чётна. Противоречие.

Пример для 13 отмеченных клеток показан на рисунке справа.



Критерии. Приведён пример, но нет оценки: 2 балла.

Сделана оценка, но нет примера или он неверный: 4 балла.