

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020– 2021 учебный год
Математика
9 класс

Требования к проверке работ:

- 1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;
- 2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

9.1. При каких p и q уравнению $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют два различных числа $2p$ и $p + q$?

Ответ: $p = 2/3$, $q = -8/3$.

Решение. По теореме Виета $3p + q = -p$, $2p(p + q) = q$. Из первого уравнения $q = -4p$. Подставив во второе, получим $6p^2 = 4p$, откуда $p = 0$ или $p = 2/3$. Первый случай не удовлетворяет условию.

9.2. Известно, что $5(a - 1) = b + a^2$. Сравните числа a и b .

Ответ: $a > b$.

Решение: $a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a - 2)^2 + 1 > 0$.

9.3. Три бегуна – Антон, Серёжа и Толя – участвуют в беге на 100 м. Когда Антон финишировал, Серёжа находился в 10 метрах позади него, а когда финишировал Серёжа, Толя находился позади него в 10 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Толя и Антон, когда Антон финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

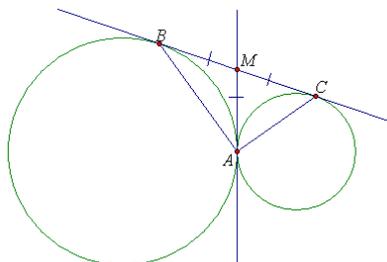
Ответ. 19 м.

Решение. Поскольку скорость Толи составляет $9/10$ от скорости Серёжи, то к моменту, когда финишировал Антон, Толя пробежал $9/10$ расстояния, преодоленного Серёжей, то есть $90 \cdot 9/10 = 81$ м. Тогда Толя и Антон, когда Антон финишировал, находились на расстоянии 19 м друг от друга.

9.4. Две окружности касаются в точке A . К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и B . Докажите, что $\angle CAB = 90^\circ$.

Решение

Пусть M — точка пересечения прямой CB и касательной к окружностям в точке A . Тогда $MC = MA = MB$ (равенство отрезков касательных). Поэтому точка A лежит на окружности с диаметром CB .



9.5. Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8 . Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 0 или 64.

Решение. Предположим, что в каждом квадрате 2×2 стоит m фигур, а в каждом прямоугольнике 1×3 — n фигур. Выделим из доски какой-нибудь прямоугольник 2×6 . С одной стороны, этот прямоугольник можно разбить на три квадрата 2×2 , и значит в нём $3m$ фигур. С другой стороны, его можно разрезать на четыре прямоугольника 1×3 , и тогда в нём $4n$ фигур. Получаем соотношение $3m = 4n$, откуда n делится на 3. Но n может принимать значения 0, 1, 2, 3. Таким образом, $n = 0$ или $n = 3$. Иными словами, либо все прямоугольники 1×3 пустые, и тогда на доске стоит 0 фигур, либо все прямоугольники 1×3 полностью заняты фигурами, и в этом случае на доске стоят 64 фигуры.

Критерии.

7 баллов. Любое верное решение:

6 баллов. Пропущен случай нуля фигур, в остальном решение верное.

5 баллов. Доказано, что все прямоугольники 1×3 (или все квадраты 2×2) пустые или заполненные, но решение не завершено.

1 балл. Приведён только верный ответ:

Интернет-ресурсы: <http://www.problems.ru>, <https://olimpiada.ru>.