9 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в ***комментариях*** к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. Найдутся ли двенадцать различных целых чисел, среди которых ровно шесть простых чисел, ровно девять нечётных чисел, ровно десять неотрицательных чисел и ровно семь чисел больших десяти?

Решение. Да, например: -8, -4, 2, 5, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 37, 81 **.**

Комментарии. Приведён любой правильный пример – 7 баллов.

9.2. Тоша едет из пункта A в пункт B через пункт C. От A до C Тоша едет со средней скоростью 75 км/ч, а от C до B Тоша едет со средней скоростью 145 км/ч. При этом на весь путь от A до B у Тоши ушло 4 часа 48 минут. На следующий день Тоша едет обратно со средней скоростью 100 км/ч. При этом на путь от B до C у Тоши ушло 2 часа, а путь из C в A Тоша проехал со средней скоростью 70 км/ч. Найдите расстояние между B и C.

Ответ: 290 км.

Решение. Обозначим за x км расстояние между B и C, а за y км – расстояние между A и C. Из системы уравнений $x/145 + y/75 = 24/5$ и $(x + y)/100 = 2 + y/70$ находим: $x = 290$ и $y = 210$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Система уравнений составлена верно, но при её решении допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

9.3. Докажите, что для любых положительных чисел a и b с $ab = 1$ справедливо неравенство $a^3 + b^3 + 1 \ge 2a + b^2$.

Доказательство. $a^3 + 1/a^3 + 1 \ge 2a + 1/a^2$, $a^6 - 2a^4 + a^3 - a + 1 \ge 0$, $(a - 1)(a^5 + a^4 - a^3 - 1) \ge 0$, $(a - 1)^2 (a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1) \ge 0$ – верно.

9.4. Внутри угла AOB отмечена точка C так, что $\angle OCA = \angle OCB = 90^0 - \angle AOB$. Точки P и T симметричны точке C относительно прямых OA и OB соответственно. Докажите, что точки P, T, A и B лежат на одной прямой.

1-е решение. Так как треугольники OAC и OAP симметричны и треугольники OBC и OBT симметричны, то $OC = OP = OT$, $\angle OPA = \angle OCA = \angle OCB = \angle OTB$ и $\angle POT = 2\angle AOB$. Так как сумма углов при основании равнобедренного треугольника OPT равна $180^0 - 2\angle AOB$, то $\angle OPT = \angle OTP = 90^0 - \angle AOB$. Так как $\angle OPA = \angle OPT$ и $\angle OTB = \angle OTP$, то точки A и B лежат на прямой PT .

2-е решение. Пусть A_1 и B_1 - точки пересечения PT с OA и OB соответственно. Достаточно проверить, что $\angle OCA_1 = \angle OCB_1 = 90^0 - \angle AOB$. Так как по условию треугольники OA_1C и OA_1P и треугольники OB_1C и OB_1T симметричны, то $OC = OP = OT$, $\angle OCA_1 = \angle OPA_1 = \angle OTB_1 = \angle OCB_1$ и $\angle POT = 2\angle AOB$. Так как сумма углов при основании равнобедренного треугольника OPT равна $180^0 - 2\angle AOB$, то $\angle OCA_1 = \angle OPA_1 = 90^0 - \angle AOB$ и $\angle OCB_1 = \angle OTB_1 = 90^0 - \angle AOB$.

9.5 На доске 20×15 клеток в некоторых клетках помещаются фишки (в каждой клетке не более одной фишки). Две фишки назовем «связными», если они расположены в одном столбце или в одной строке, и между ними нет других фишек. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на доске так, чтобы у каждой было не больше двух «связных» для нее фишек?

Ответ: 35.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ количества фишек в строках 1, 2, … , 20, а $y_1, y_2, \dots, y_{15}$ – количества фишек в столбцах 1, 2, … , 15. Тогда общее количество фишек $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = y_1 + y_2 + \dots + y_{15}$. Количество «связностей» $k \geq (2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) + \dots + (2x_{20} - 2) + (2y_1 - 2) + (2y_2 - 2) + \dots + (2y_{15} - 2) = 4S - 70$. Так как у каждой фишки не более двух связных с ней фишек, то $2S \geqslant k \geqslant 4S - 70$, то есть $S \leqslant 35$. Можно разместить на доске 35 фишек, заполнив нижнюю строчку и левый столбец, и еще одну фишку поместив в правый верхний угол.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Верная обоснованная оценка – 4 балла.
Верный пример – 3 балла.