Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
9 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин (240 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 9.1
На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
Количество баллов 7
Ответ:
Выигрывает первый игрок.
Решение
Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет. Каждым следующим, если второй игрок берет x монет, то первый игрок должен взять 101x монет (он всегда может это сделать, потому что если x четное число от 2 до 100, то (101x) нечетное число от 1 до 99). Так как $2005 = 101x \cdot 19 + 85 + 1$, то через 19 таких ответов после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

Задание 9.2
Разложите на множители $x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$.
Количество баллов 7
Решение
Сгруппируем так
$(x^4 + x^2 + 1) + 2020(x^2 + x + 1)$
Далее
$(x^4 + x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 – x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 – x + 1)$
То есть делится на $x^2 +x + 1$
Поэтому
$x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021 =$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 – x + 1) + 2020(x^2 + x + 1) =$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 – x + 2021)$

Задание 9.3
В выпуклом пятиугольнике $PQRST$ угол PRT в два раза меньше, чем угол QRS, а все стороны равны. Найдите угол PRT.
Количество баллов 7
Ответ:
30°.
Решение. Из условия задачи следует, что $\angle PRQ + \angle TRS = \angle PRT$ **(*).**

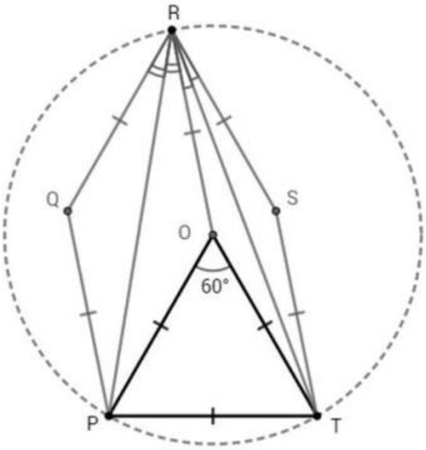

Рисунок а

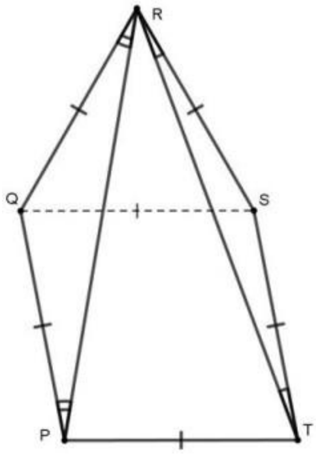

Рисунок б

<u>Первый способ</u>. Используем метод “свертывания”. Симметрично отразим треугольник PQR относительно прямой PR, а треугольник TSR – относительно прямой TR (см. рис. а). Из равенства (*) и равенства $RQ = RS$ следует, что образами точек Q и S является одна и та же точка O.
Заметим, что треугольник TOP – равносторонний. Кроме того, $OR = OP = OT$. Следовательно, O – центр описанной окружности треугольника PRT. Тогда $\angle PRT = 0{,}5\angle POT = 30°$.
<u>Второй способ</u>. Докажем, что $QPTS$ – параллелограмм (см. рис. б).
Действительно, используя равенство углов при основаниях в равнобедренных треугольниках PQR и RST и равенство (*****), получим: $\angle QPT + \angle PTS = \angle QPR + \angle RPT + \angle RTP + \angle STR = \angle PRQ + \angle TRS + (180° – \angle PRT) = 180°$.
Таким образом, $PQ \parallel ST$ и $PQ = ST$ (по условию), то есть $QPTS$ – параллелограмм.. Тогда $QS = PT$, значит, треугольник QRS – равносторонний.
Следовательно, $\angle PRT = 0{,}5\angle\ QRS = 30°$.
Дополнительные критерии проверки
“7” *Приведено полное обоснованное решение*

“4-6” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, использовано, но не обосновано, что образы точек Q и S при симметриях совпадают)*
“1-3” *Верный ответ получен, исходя из того, что QPTS – параллелограмм, но это не доказано*
“0” *Приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением правильного пятиугольника*
“0” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

Задание 9.4
Решить в натуральных числах n и m уравнение
$(n+1)!(m+1)! = (n+m)!$
Количество баллов 7
Ответ:
{(2; 4), (4; 2)}
Решение
Очевидно, что n > 1 и m > 1 (так как при n = 1 получим $2(m+1)! = (1+m)!$ и аналогично при m = 1).
Сократим уравнение на $(n+1)!$, получим $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m+1) = (n+2)(n+3)\ldots(n+m)$
Здесь слева m + 1 множитель, справа m – 1.
При n > 3 получаем $(1\cdot 2\cdot 3)\cdot 4\cdot\ldots\cdot(m+1) = (n+2)(n+3)\ldots(n+m)$
Или $6\cdot 4\cdot\ldots\cdot(m+1) = (n+2)(n+3)\ldots(n+m)$
Здесь имеем одинаковое число множителей, причем при n > 3 имеем
$6 \le n+2$
$4 < n+3$
$5 < n+4$
...
$(m+1) < (n+m)$
Следовательно, равенство невозможно. Таким образом, если (n, m) решение, то 1 < n < 4. В силу симметрии уравнения если (n, m) решение, то 1 < m < 4. (При этом одновременно эти утверждения не обязательно верные).
Пусть теперь n = 2, тогда $(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m+1)) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2+m)$
Или после сокращения $(1\cdot 2\cdot 3) = (2+m)$
Отсюда m = 4
Пусть теперь n = 3, тогда $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m+1)) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3+m)$
Или после сокращения $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) = (2+m)(3+m)$
Нет натуральных решений

Задание 9.5
В классе учатся 30 человек: отличники, троечники и двоечники. Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются, а троечники на заданные им вопросы строго по очереди то отвечают верно, то ошибаются. Всем ученикам было задано по три вопроса: “Ты отличник?”, “Ты троечник?”,
“Ты двоечник?”. Ответили “Да” на первый вопрос – 19 учащихся, на второй – 12, на третий – 9. Сколько троечников учится в этом классе?
Количество баллов 7
Ответ:
20 троечников
Решение. Пусть a – количество отличников, b – количество двоечников, c – количество троечников, которые ошиблись в ответе на первый вопрос, правильно ответили на второй

и ошиблись в ответе на третий (назовем таких троечников троечниками первого типа), а d – количество троечников, которые правильно ответили на первый вопрос, ошиблись в ответе на второй и правильно ответили на третий (назовем таких троечников троечниками второго типа).
На первый вопрос ответили “Да” отличники, двоечники и троечники первого типа, следовательно, $a + b + c = 19$. На второй вопрос “Да” ответили двоечники и троечники первого типа, то есть $b + c = 12$. На третий вопрос “Да” ответили только троечники первого типа, то есть $c = 9$. Тогда из второго уравнения получим, что $b = 3$, а из первого уравнения: $a = 7$. В классе – 30 учащихся, значит $d = 30 – 19 = 11$, поэтому всего троечников: $9 + 11 = 20$.
Дополнительные критерии проверки

- “7” – приведено полное обоснованное решение
- “5-6” – приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности
- “1-2” – в приведенных рассуждениях указано, что троечники бывают двух типов, но дальнейших продвижений нет или допущена вычислительная ошибка.
- “0” – задача не решена или решена неверно