9 класс

1. В строку выписано 5 последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого – 20?
   Ответ: возможно.
   Решение. Например, подходят числа: 889999, 890000, 890001, 890002, 890003.

2. В эстрадном ансамбле "Солнышко" все играют либо на скрипке, либо на контрабасе. Средний возраст тех, кто играет на скрипке – 22 года, а тех, кто играет на контрабасе – 45 лет. Игорь поменял свой инструмент и вместо контрабаса стал играть на скрипке. В результате этого средний возраст тех, кто играет на скрипке увеличился на 1 год, и средний возраст тех, кто играет на контрабасе тоже увеличился на 1 год. Сколько человек в ансамбле "Солнышко"?
   Ответ: 23.
   Решение. Пусть x человек – количество тех, кто играет на контрабасе, не считая Игоря, y – количество играющих на скрипке (так же не считая Игоря).
   Из условия следует, что суммарный возраст тех, кто играет на контрабасе, сначала был равен: $(x+1)\cdot 45$, а когда Игорь поменял инструмент, стал равен $x\cdot 46$.
   Тогда возраст Игоря равен $(x+1)\cdot 45 - x\cdot 46 = 45 - x$.
   Аналогично получаем, что возраст Игоря равен $23\cdot(y+1) - 22\cdot y = y + 23$.
   Тогда $45 - x = y + 23$, откуда $x + y = 22$ количество пиратов без Игоря, а с Игорем – 23.

3. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 5, а другое — составное.
   Решение.
   Заметим, что простые числа 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31 дают при делении на 7 остатки 0, 4, 6, 5, 2, 1 и 3 соответственно. (Всевозможные остатки при делении на 7).
   Если число N делится на 7, то его можно представить в виде N = 7 + (N – 7),
   если N дает остаток 1 при делении на 7, то N = 29 + (N – 29),
   если N дает остаток 2 при делении на 7, то N = 23 + (N – 23), и так далее.
   Второе слагаемое во всех суммах делится на 7 (как разность двух чисел с одинаковыми остатками) и больше 7, значит составное.

4. AL – биссектриса треугольника ABC, K – такая точка на стороне AC, что $CK = CL$.
   Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.
   Решение. Пусть $\angle BAC = 2a$, $\angle ABC = 2b$, тогда $\angle BCA = 180^\circ - (2a + 2b)$.
   В равнобедренном треугольнике LCK: $\angle CLK = \angle CKL = (180^\circ - \angle BCA)/2 = a + b$.
   $\angle LKC = \angle LAK + \angle ALK$, как внешний угол в треугольнике ALK, откуда $\angle ALK = b$.
   Тогда $\angle ALK = \angle ABK$, точки A, B, L, K лежат на одной окружности. Из этого следует равенство углов $\angle PAL = \angle PBL$, как опирающиеся на одну дугу. Получили, что треугольник PAL – равнобедренный и $AP = PL$, что и требовалось доказать.
5. В шахматном турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось ½ очка, за поражение – 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого побед больше, чем количество ничьих.
   Решение.
   Допустим, что победитель турнира выиграл менее 10 партий. Тогда максимальное количество очков, которое он мог набрать $9\cdot 1 + 10\cdot 0{,}5 = 14$ (максимум 9 раз победить и 10 раз сыграть вничью). Тогда занявший второе место мог набрать максимум 13,5 очков, третье место – 13 очков, …, 19-е место – 5 очков, 20-е место – 4,5 очков (так как все набрали разное количество очков). А всего они могли набрать максимум $14 + 13{,}5 + 13 + 12{,}5 + \ldots + 5 + 4{,}5 = 185$ очков. Но, так как в каждой партии разыгрывается 1 очко, а партий всего $19\cdot 20/2 = 190$, то и очков они должны набрать в сумме 190. Противоречие.
   Значит, победитель турнира выиграл минимум 10 партий, тогда ничьих у него максимум 9. То есть побед у него больше, чем ничьих.