9 класс. Решения и критерии

1. Коля говорит, что две шоколадки дороже пяти жвачек, Саша – что три шоколадки дороже восьми жвачек. Когда это проверили, прав оказался только один из них. Верно ли, что 7 шоколадок дороже, чем 19 жвачек? Не забудьте обосновать ответ.

Решение. Пусть цена шоколадки c, а цена жвачки g. Коля говорит, что $2c > 5g$ или $6c > 15g$, а Саша говорит, что $3c > 8g$ или $6c > 16g$. Если бы Саша был прав, то был бы прав и Коля – это противоречит условию. Значит, прав Коля, но не Саша, и на деле $3c \leqslant 8g$ или $21c \leqslant 56g < 57g$, то есть $21c < 57g$ и $7c < 19g$. Ответ: неверно.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только частные случаи конкретных цен для шоколадок и жвачек – не более 1 балла. В задачу вводятся дополнительные условия, вроде предположений о денежных единицах – не более 1 балла. Доказательство целиком основано на соотношениях типа «$\approx$» (приближенно равно) – не более 1 балла.

2. Расположите в одной строке числа от 1 до 100 так, чтобы числа стоящие по соседству отличались либо на 2, либо на 5.

Решение: Например, $99, 97, \ldots, 13, 11, 9, 4, 2, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 10, 12, \ldots, 98, 100$.

Критерии. По описанию участника не очевиден порядок чисел в последовательности (участник предлагает «додумать» самому читателю) – не более 3 баллов.

3. Петя и Вася играют в игру на клетчатом поле 9×9. В начале игры в центральной клетке стоит фишка. Петя и Вася передвигают ее по очереди в соседнюю по стороне клетку. При этом Петя своим ходом может либо продолжить направление предыдущего хода Васи, либо повернуть направо. Вася же может своим ходом либо продолжить направление предыдущего хода Пети, либо повернуть налево. Проигрывает игрок, который не может сходить. Первый ход Петя может делать в любом направлении. Может ли Петя наверняка победить?

Ответ: нет, не может. Понятно, что выиграть может только тот игрок, который своим ходом поставит фишку в угол. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит фишка, меняется. Поскольку все угловые клетки доски 9×9 – того же цвета, что и центральная, поставить фишку в угол может только игрок, ходящий на поля черного цвета, то есть Вася.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Рассматриваются лишь некоторые (не все) способы игры Пети, либо только способы игры, где Вася «подыгрывает» Пете (делает предсказуемые ходы) – не более 3 баллов.

4. Поликарп записал на доске пример на умножение двух трехзначных чисел и вместо знака умножения написал 0. В результате, он получил семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Ответ. В 73.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Тогда указанное семизначное число будет иметь вид $10000a + b$, по условию $10000a + b = nab$, откуда $b = \dfrac{10000a}{na - 1}$. Заметим, что числа a и $na-1$ не имеют общих делителей, так что $na-1 = p$ – делитель 10000. Кроме того, $nab \geqslant 10000a$, то есть $n \geqslant \dfrac{10000}{999} > 10$. Значит, $n \geqslant 11$, $p \geqslant 1099$, то есть надо проверить значения p равные 10000, 5000, 2500, 2000, 1250 и искать те из них, для которых $p+1$ раскладывается на двузначный (n) и трехзначный (a) делители.

Пусть $p = 10000$, имеем $10001 = 73 \cdot 137$, тогда $n = 73$, $a = b = 137$.

Пусть $p = 5000$, $5001 = 3 \cdot 1667$, число 1667 – простое; трехзначных делителей нет.

Пусть $p = 2500$, $2501 = 41 \cdot 61$, нет трехзначных делителей.

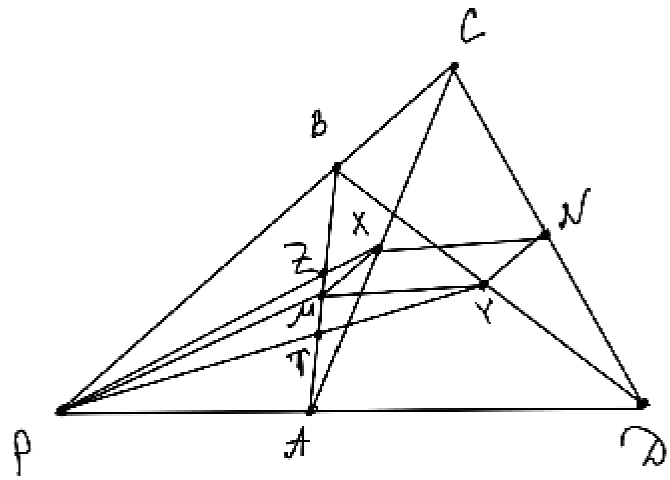
Пусть $p = 2000$, $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. В силу того, что $n \geqslant 11$, подходит значение n не менее 23, но тогда $a \leqslant 3 \cdot 29 = 87$ двузначно.

Пусть $p = 1250$, $1251 = 3 \cdot 417$, число 417 – простое. Нет разложения на двузначное и трехзначное числа.

Итак, остается только вариант $n = 73$, и условия действительно выполняются: $\frac{1370137}{137 \cdot 137} = 37$.

Критерии. Только ответ – 1 балл, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но перебор неполный или необоснованный – 5 баллов.

5. Точки X и Y – середины диагоналей соответственно AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке P. Докажите, что площадь треугольника PXY в четыре раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$.



Решение: Пусть M и N – середины сторон AB и CD соответственно, а точка P и сторона CD лежат по разные стороны от прямой AB. Четырёхугольник $MXNY$ – параллелограмм, поэтому $S_{\Delta MXY} = S_{\Delta NXY}$. Обозначим $S_{ABCD} = S$. Тогда $S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD} = 2S$. Отрезок MX – средняя линия треугольника ABC, поэтому прямые MX и CP параллельны, значит, точки B и P равноудалены от прямой MX.

Следовательно, $S_{\Delta PMX} = S_{\Delta BMX} = S_{BCXM} - S_{\Delta BCX} = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$.

Аналогично точки A и P также равноудалены от прямой MY. Следовательно, $S_{\Delta PMY} = S_{\Delta AMY} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABD}$. Кроме того, точка Z пересечения диагоналей BM и PX трапеции $BPMX$ лежит внутри трапеции $BPMX$, а точка T пересечения диагоналей трапеции $AYMP$ – внутри трапеции $AYMP$, поэтому точка M лежит на отрезке ZT, а значит, внутри треугольника PXY. Заметим, что

$$S_{MXNY} = S - S_{\Delta CNX} - S_{\Delta DNY} - S_{AMYD} - S_{BCXM} = S - \frac{1}{4} S_{\Delta ACD} - \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABC}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta PXY} = S_{\Delta MXY} + S_{\Delta PMX} + S_{\Delta PMY} = \frac{1}{2} S_{MXNY} + S_{\Delta PMX} + S_{\Delta PMY} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{4} S_{\Delta ACD} - \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABC}\right) + \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} + \frac{1}{4} S_{\Delta ABD} =$$
$$= \frac{1}{2} S - \frac{1}{8}\left(S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD}\right) = \frac{S}{2} - \frac{2S}{8} = \frac{S}{4}.$$

Что и требовалось доказать.