# 9 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

| баллы | правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 7 | полное верное решение |
| 6-7 | верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение |
| 5-6 | решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений |
| 2-3 | доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи |
| 0-1 | рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении) |
| 0 | решение неверное, продвижения отсутствуют |
| 0 | решение отсутствует |

1\.

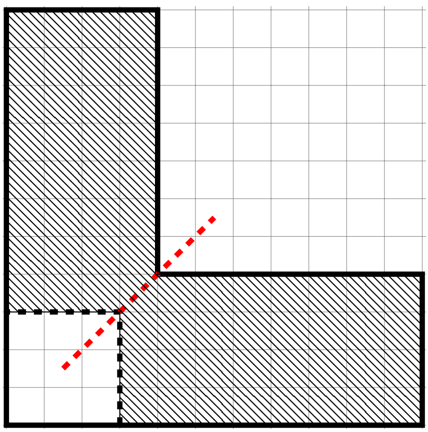
**1.** У Васи есть калькулятор, который для любых чисел $a$ и $b$ вычисляет числа $a+b$, $a-b$, $\frac{1}{a+1}$, $a \neq -1$. Может ли Вася, сделав не больше 7 операций, получить квадрат любого положительного числа?

**Решение.** Перечислим операции:

$$a-1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a+1}$$

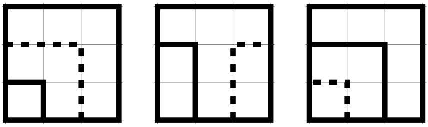
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2+a},\ \frac{1}{a^2+a}-1,\ \frac{1}{\frac{1}{a^2+a}-1+1},\ (a^2+a)-a.$$

**2**. Из клетчатого листочка вырезали фигурку, изображенную жирной линией на рисунке. Петя разрезает эту фигуру на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



**Решение.** Победит начинающий, его первый ход показан на рисунке (жирная пунктирная линия). Красная пунктирная прямая делит закрашенную фигуру на две одинаковые части. Разрез по правилам игры не может затронуть сразу обе части, в любой части можно делать разрезы независимо от того, что происходит в другой.

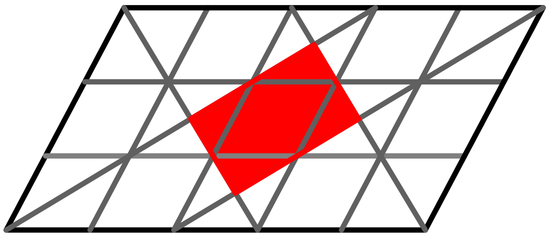
На любой ход Васи в закрашенной фигуре Петя отвечает симметричным разрезом относительно красной линии.



(a) (b) (c)

Когда Вася решит разрезать квадрат $3 \times 3$, у него найдется три варианта это сделать (см. рисунок). И на каждый такой вариант у Пети найдется ход - ответ. Значит, у Васи ходы закончатся раньше.

**3**. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.



**Решение.** Биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник. Разделим параллелограмм на ромбы со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам параллелограмма. Ясно, что площадь красного прямоугольника составляет две площади ромба со стороной 1. А всего ромбов в этом параллелограмме — 15. Откуда следует, что отношение площадей равно $\dfrac{2}{15}$.

**4**. Найдите наибольшее чётное трехзначное число $x$, дающее при делении на 5 остаток 2 и удовлетворяющее условию $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 3$.

**Решение.** Из условия получаем, что найдутся такие $a, b \in \mathbb{N}$, что $3a = 30,\ \text{НОД}(x, 15) = 3b$, причем $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Рассмотрим равенство $\text{НОД}(x, 15) = 3b$. Это значит, что $\exists c, d \in \mathbb{N}$ такие, что $x = 3bc$ и $15 = 3bd$, причем $\text{НОД}(c, d) = 1$.

Из равенства $15 = 3bd$ следует, что $bd = 5$, т.е. $\left[\begin{array}{l} b = 1,\ d = 5 \\ b = 5,\ d = 1 \end{array}\right.$.

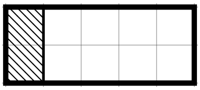
Пусть $b = 1,\ d = 5$. Тогда $x = 3c$. Учитывая, что $x$ — чётное, получим $x = 6m$. Из условия $\text{НОД}(c, d) = 1$ следует, что $c$ не делится на 5, а это значит, что $6m$ не делится на 5, т.е. $x$ может быть равен любому из следующих чисел: $30l + 6,\ 30l + 12,\ 30l + 18,\ 30l + 24$, где $l$ — любое натуральное число. Учитывая, что $x$ при делении на 5 дает остаток 2, нам подходит только $30l + 12$.

Пусть $b = 5,\ d = 1$. Тогда $x = 15c$, т.е. $x = 30t$, но тогда $\text{НОД}(x, 15) = 15$ и $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 15$ — противоречие.

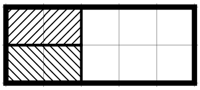
Следовательно задача свелась к поиску наибольшего трёхзначного числа вида $30l + 12$. Это 972.

**5**. Сколькими способами можно покрыть прямоугольную доску размером $2 \times 13$ прямоугольными плитками размером $1 \times 2$? (Плитки укладываются так, чтобы они не пересекались и чтобы целиком помещались на доске.)

**Решение.** Обозначим через $x_n$ число способов покрытия доски размером $2 \times n$ плитками размера $1 \times 2$. Левый конец такой доски будет покрыт одним из двух способов.



(d)



(e)

В первом случае имеется $x_{n-1}$ способов покрыть доску $2 \times n$, а во втором случае — $x_{n-2}$ способов. Поэтому всего имеется $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ способов покрыть доску $2 \times n$. Очевидно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тогда $x_3 = 3,\ x_4 = 5,\ \ldots,\ x_{13} = x_{12} + x_{11} = 144 + 233 = 377$.