9 класс

9.1. Выясните, можно ли найти такие натуральные k, при которых значение выражения $k^3 - 3k^2 + 2k + 2$ делится на 2020?

Ответ: таких k не существует.

Решение. Выражение $k^3 - 3k^2 + 2k + 2$ можно представить в виде $(k-2)(k-1)k + 2$. Это произведение трех последовательных натуральных чисел, к которому прибавили 2.

Последняя цифра произведения трех последовательных натуральных чисел $(k-2)(k-1)k$ может принимать одно из следующих значений: 0, 4 или 6. Следовательно, последняя цифра $k^3 - 3k^2 + 2k + 2$ может быть равна 2, 6 или 8, а значит оно не делится на 10, и тем более не может не делиться на 2020.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 балл.

9.2. Возраст некого человека в 1988 году был равен сумме цифр его года рождения. Сколько ему было лет?

Ответ: 22.

Решение. Число лет человека равно сумме цифр четырехзначного числа, каждая из которых не больше 9. Следовательно, ему не больше 36 лет, и он родился в XX веке. Пусть x – число десятков, y – число единиц его года рождения.

Тогда по его возрасту получаем уравнение

$$1 + 9 + x + y = 88 - (10x + y), \text{ или } 11x + 2y = 78.$$

Отсюда $x = 6$, $y = 6$, а значит он родился в 1966 году, и в 1988 ему было 22 года.

9.3. Дорога от Кимовска до Москвы состоит из трёх участков: Кимовск – Новомосковск (35 км), Новомосковск – Тула (60 км) и Тула – Москва (200 км). Автобус, скорость которого нигде не превышала 60 км/ч, проехал от

Кимовска до Тулы за 2 часа, а от Новомосковска до Москвы – за 5 часов. Какое время автобус мог быть в пути?

Ответ: От $5\frac{7}{12}$ до 6 часов.

Решение. Время всего пути получается вычитанием из суммы 2+5 времени, затраченного на участке Новомосковск – Тула. По условию на этот участок (60 км) автобус затратил не меньше часа. С другой стороны путь от Кимовска до Новомосковска он затратил не меньше $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ часа, значит, на путь от Новомосковска до Тулы осталось не больше $2 - \frac{7}{12} = 1\frac{5}{12}$. Следовательно, время всего пути не больше 7–1 = 6 часов и не меньше $7 - 1\frac{5}{12} = 5\frac{7}{12}$ часа.

Покажем, что любое время в этом промежутке возможно. Для того, чтобы пройти весь путь за время $6 - t$ $\left(0 \le t \le \frac{5}{12}\right)$ автобусу надо пройти участок Кимовск – Новомосковск за время $1 - t \ge \frac{7}{12}$, участок Новомосковск – Тула за $1 + t$, а участок Тула – Москва – за время $4 - t \ge 3\frac{7}{12}$, что укладывается в ограничение скорости, так как $\frac{200}{60} = 3\frac{1}{3} < 3\frac{7}{12}$

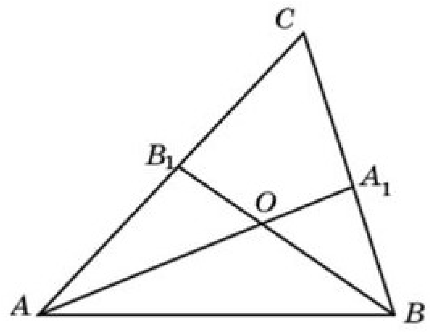
Комментарий. Ответ 6 и (или) $5\frac{7}{12}$ – по 1 баллу, получен верный ответ, но не доказано, что возможно любое время из промежутка – 5 баллов.

9.4. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на четыре части так, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновеликими?

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что это возможно. Пусть в треугольнике ABC точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и AC соответственно, отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, при этом площади треугольников AOB_1, AOB и BO_1 равны.

Так как треугольники AOB и BOA_1 имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины B, то из равенства их площадей следует равенство отрезков AO и OA_1. Аналогично $BO = OB_1$. Получаем, что ABA_1B_1 – параллелограмм, что противоречит условию.



Комментарий. Ответ без обоснования – 0 балл.

9.5. Варя и Мирон играют в следующую игру. На столе лежит 10 кучек по 10 камней в каждой. Игроки делают ходы поочерёдно, а начинает Варя. Делая ход, играющий делит любую кучку, в которой больше одного камня, на несколько равных кучек. Побеждает тот игрок, у которого нет возможности сделать ход (перед его ходом в каждой кучке ровно по одному камню). Кто победит при правильной игре обоих игроков?

Ответ: Мирон.

Решение. Будем называть кучу, в которой один камень «единичной», а в которой простое число камней – «простой». Простую кучу из p камней можно разделть только на p единичных куч.

Для победы Мирону достаточно каждый раз повторять ходы Вари до тех пор, пока не останется одна куча, состоящая из 10 камней. При этом помимо неё на столе будет находиться некоторое количество (возможно ни одной) n простых кучек. Если n чётное, то Мирону необходимо разделить последнюю полную кучку на 5 кучек по 2 камня, а если n – нечётное, то на 2 кучки по 5 камней или на 10 по 1. Теперь все неединичные кучки – простые, при этом перед ходом Вари их нечётное количество, а перед ходом Мирона – чётное. На каждом ходу количество простых кучек уменьшается на единицу, значит последнюю простую кучку разделит Варя, а победит Мирон.

Замечание. Для победы Мирону не обязательно в точности повторять ходы Вари. Ему необходимо следить, чтобы после каждого его хода оставалось чётное число полных кучек. Для этого он каждый раз, после того, как Варя разделила полную кучку, должен разделить другую полную кучку на такое число простых, чтобы общее число простых стало чётным. Так необходимо делать до тех пор, пока не останется одна полная кучка. Далее необходимо действовать как в решении. Другие способы игры за Мирона приводят к поражению.

Комментарий. Доказательство утверждения, что тот, кто разбирает последнюю полную кучку – побеждает – 2 балла.