

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

9 класс

1. *Решение.* Преобразуем заданное выражение:

$$\begin{aligned} & \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \underbrace{22 \dots 2}_{2020} - \underbrace{33 \dots 3}_{2020} = \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \cdot 10^{2020} + \underbrace{22 \dots 2}_{2020} - \underbrace{33 \dots 3}_{2020} = \\ & = \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \cdot 10^{2020} - \underbrace{11 \dots 1}_{2020} = \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \cdot (10^{2020} - 1) = \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{2020} = \\ & \underbrace{11 \dots 1}_{2020} \cdot 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{2020} = \underbrace{11 \dots 1}_{2020}^2 \cdot 3^2 = \underbrace{33 \dots 3}_{2020}^2. \end{aligned}$$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Решение отражает некоторые идеи. Проведены преобразования заданного выражения, которые содержат ошибки и не позволяют получить требуемый ответ
1-2	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции указано число, квадрат которого соответствует значению выражения
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

2. *Ответ:* 2.

Решение. $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} = \frac{1}{xy+1} - \frac{1}{y^2+1} \Leftrightarrow$

$\frac{xy-x^2}{(x^2+1)(xy+1)} = \frac{y^2-xy}{(y^2+1)(xy+1)}$. Так как $x \neq y$, то из полученного равенства следует, что

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow xy^2 + x = x^2y + y \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0$. Учитывая условие $x \neq y$, получим,

что $xy = 1$.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год

Тогда $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1} = 2 \cdot \frac{2}{xy+1} = 2$.

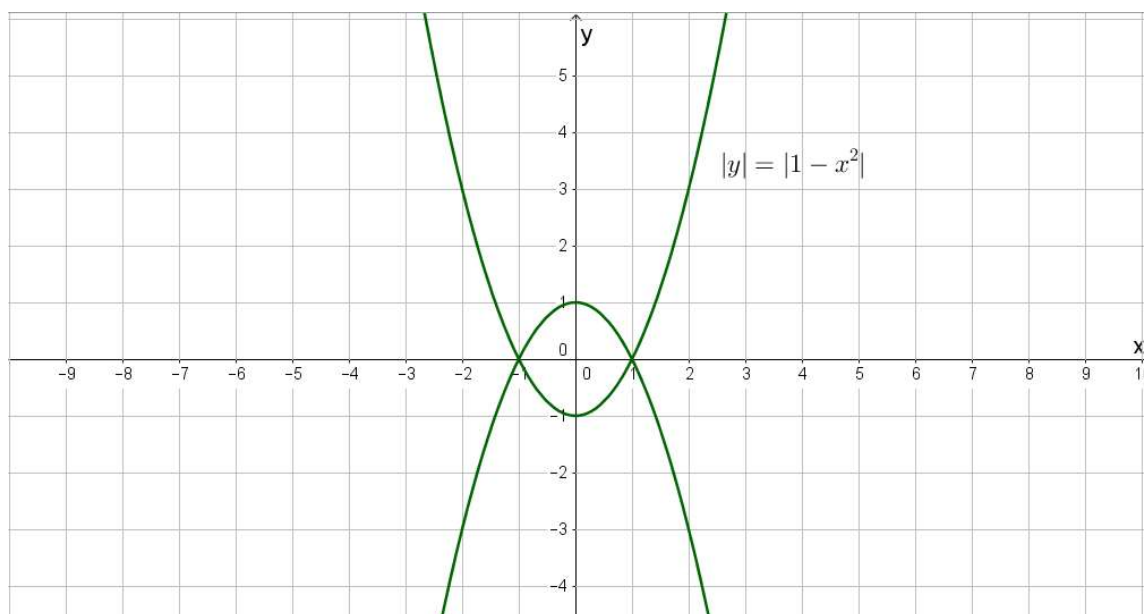
Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

3. *Решение.* Используя свойство модуля $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a = -b \end{cases}$, получим или $y = 1 - x^2$, или $y = x^2 - 1$.

В обоих случаях имеем квадратичные функции, графиком каждой из которых является парабола.

Таким образом, множество точек, удовлетворяющих заданному условию, состоит из двух парабол (см. рисунок ниже).



Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график квадратичной функции без учета модуля и его свойств.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

4. *Решение.* Воспользуемся признаком параллелограмма – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и равны.

Построим середину M заданного отрезка. Для этого воспользуемся свойством средней линии треугольника (рис. 1).

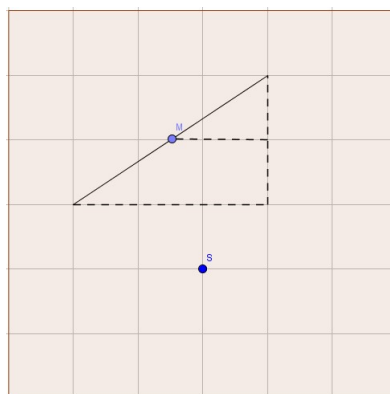


Рис. 1.

Через концы заданного отрезка проведем прямые, параллельные отрезку MS . Для этого построим равные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых, образуя соответственно равные углы в параллельными линиями, также будут параллельны. Поскольку для построения одной из таких прямых клеток недостаточно, используем не узлы клеток, а середины их сторон (рис. 2).

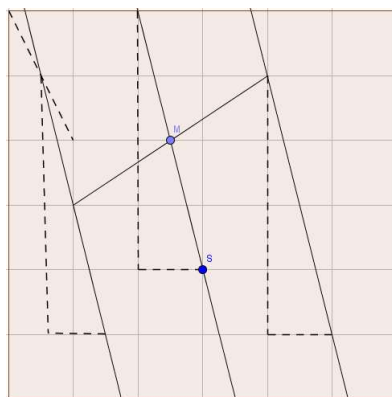


Рис. 2.

На одной из построенных прямых отложим отрезок, равный отрезку MS . Для этого используем равные прямоугольные треугольники (рис. 3).

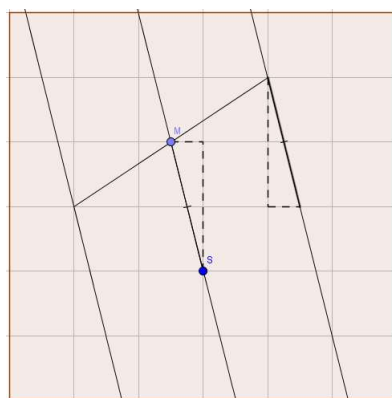


Рис. 3.

Через полученную точку и заданную точку S проведем прямую, которая параллельна данному отрезку, образует вместе с ним параллелограмм в силу параллельности и равенства отрезков, построенных ранее. Требуемый параллелограмм получен (рис. 4а, б).

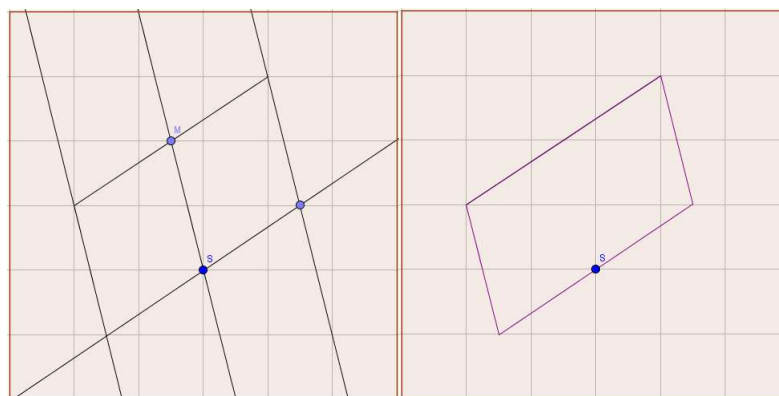


Рис. 4а.

Рис. 4б.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год*

5-6	Построена фигура, удовлетворяющая требованию задачи. Некоторые из дополнительных построений не обоснованы.
3-4	Построена фигура, удовлетворяющая требованию задачи. Проведены параллельные прямые, отложены равные отрезки, однако их построение не комментируется.
1-2	Построен четырехугольник, но фигура не удовлетворяет условию задачи. Построения не обоснованы.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ:* нет, невозможна.

Решение. Пусть такая компания возможна и состоит из n человек. Тогда в ней имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ пар, у каждой из которых список общих друзей состоит из 4 человек. Если записать эти списки подряд, то получим список, в котором $2n(n-1)$ позиций. При этом каждый участник компании является общим другом для каждой пары своих друзей (всего таких пар – $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$) и ни для какой другой пары. Поэтому он упомянут в списке 45 раз, и всего в списке $45n$ позиций. Таким образом, должно выполняться равенство $2n(n-1) = 45n$, что невозможно ни при каких натуральных значениях n .

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.