9 класс

9.1. Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ – квадрат целого числа.

Решение. По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y-2}$, откуда $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{(x+2)(y-2)}$. Так как $x+y$ положительно, то $xy=(x+2)(y-2)$. Откуда $y=x+2$. Тогда $xy+1=x(x+2)+1=(x+1)^2$.

Комментарий. Доказано, что $y=x+2$ – 2 балла.

9.2. На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

Ответ. 4.

Решение. Заметим, что на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек, не может быть 5 синих точек. Действительно, в этом случае между крайними синими точками будет 3 синих, а, значит, еще хотя бы 2 красные. Поэтому на таком отрезке не более 4 синих точек.

Покажем, что 4 синие точки могут лежать на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек. Пусть точки расположены на прямой в следующем порядке: 2 красных – 4 синих – 2 красных – 4 синих – 2 красных. Тогда все условия выполняются, и есть отрезок с 4 синими точками.

Комментарий. Доказано, что синих точек между соседними красными не больше 4 – 4 балла.

Приведен верный пример с 4 синими точками – 3 балла.

9.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3>y^2$ и $y^3>x^2$. Докажите, что $y>1$.

Решение. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа x и y положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $(xy)^2$, получим: $xy>1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел x и y больше 1. Если $y>1$, то утверждение доказано. Пусть $x>1$. Тогда из неравенства $y^3>x^2$ следует, что $y^3>1$, то есть $y>1$.

Комментарий. Доказано, что $xy>1$ – 2 балла.

Доказано, что одно из чисел x и y больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

9.4. В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 3×3. В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

Ответ. 6 рыцарей.

Решение. Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 3 (так мы покажем, что рыцарей не больше 6). Пусть лжецов не больше 2, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 3.

На рисунке показано, как могли поселиться 6 рыцарей и 3 лжеца.

Р	Л	Р
Р	Р	Л
Л	Р	Р

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 3 лжецов и 6 рыцарей – 2 балла.

Доказано, что рыцарей не более 6 – 5 баллов.

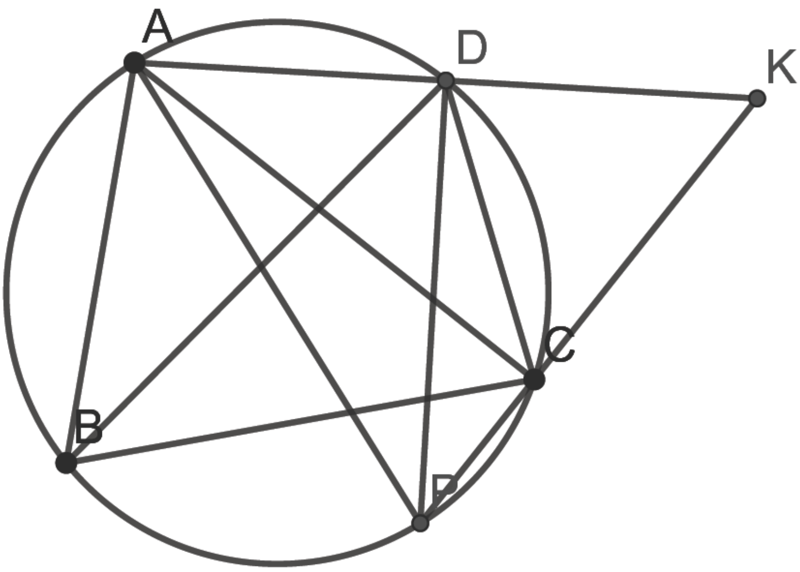
Замечание 1. В примере лжецы не должны быть соседями.

Замечание 2. Есть и другие примеры.

9.5. На данной окружности ω выбрана фиксированная точка *A*. Выберем на окружности две произвольные точки *B* и *C*, и найдем точку *D* пересечения биссектрисы угла *ABC* с окружностью ω. Пусть *K* – такая точка, что точка *D* – середина отрезка *AK*. Прямая *KC* вторично пересекает окружность в точке *P* ($P \neq C$). Докажите, что точка *P* не зависит от выбора точек *B* и *C*.

Первое решение. Покажем, что точка *P* диаметрально противоположна точке *A*. Это и будет означать, что *P* не зависит от выбора точек *B* и *C*. Таким образом, нам нужно доказать, что *PD* – перпендикуляр к *AK*. Будем считать, что точка *C* лежит на отрезке *KP*. Другой случай разбирается аналогично. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу *AD*), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу *CD*). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как *BD* – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.

Второе решение. Как и в первом решении, покажем, что точка *P* диаметрально противоположна точке *A*. Так как *BD* – биссектриса угла *ABC*, то дуги *AD* и *DC* равны, значит, $AD = DC$. Из того, что точка *D* – середина отрезка *AK*, следует $AD = DK$. Значит, $AD = DC = DK$. То есть в треугольнике *ACK* медиана *CD* равна половине стороны *AK*, к которой она проведена. Значит, треугольник *ACK* – прямоугольный, и $\angle ACK = 90°$. Поэтому $\angle ACP = 90°$, и *AP* – диаметр окружности ω.



Комментарий. Указано условие, равносильное утверждению задачи (точка P диаметрально противоположна точке A) – 2 балла.

Разобран только один случай расположения точки C – баллы не снимаются.