Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап | 10 класс | 1.12.2020

*Работа рассчитана на 235 минут*

**1.** Решить систему $\begin{cases} \sqrt{2x^2+2} = y+1; \\ \sqrt{2y^2+2} = z+1; \\ \sqrt{2z^2+2} = x+1. \end{cases}$

**2.** В турнире по пляжному футболу участвуют 17 команд, причём каждая играет с каждой ровно один раз. За победу в основное время команде начисляют 3 очка. За победу в дополнительное время - 2 очка и за победу по пенальти - 1 очко. Проигравшая команда очков не получает. Какое наибольшее количество команд могут набрать ровно по 5 очков?

**3.** Найти все функции, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых $x$, $y$ выполняется равенство $f(x+|y|)=f(|x|)+f(y)$.

**4.** Пусть $a$ и $b$ – положительные числа такие, что $a \geq 4b$. Доказать, что $a^2+b^2 \geq 4ab$.

**5.** Диагонали вписанного четырёхугольника ABCD пересекаются в точке P. Пусть K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что сумма углов KPL и NPM равна 180 градусам.

**6**. Вася задумал натуральное число $n \leq 2020$. Петя пытается угадать его следующим образом: он называет некоторое натуральное число $x$ и спрашивает, больше ли его задуманное число (верно ли, что $x<n$?), а Вася отвечает ему «да» или «нет». Петя выигрывает, если он узнает число, и проигрывает, если после получения ответа «нет» во второй раз он не может назвать задуманное число. Какого наименьшего числа вопросов достаточно Пете, чтобы он победил?