

Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике  
2020-21 учебного года

10 класс (время решения – 4 часа)

1. На склад зерна напала армия мышей. Чтобы бороться с мышами, на склад пустили кота, на следующий день – второго кота, и далее каждый день пускали еще одного кота. Мышь съедает за сутки 100 граммов зерна, а кот съедает за сутки 10 мышей. Через несколько дней мышей не осталось. После подсчета убытков оказалось, что за эти несколько дней мыши съели 55 кг зерна. Сколько было мышей? (Мышь успевает съесть 100 граммов зерна и в те сутки, когда она поймана котом.)
2. Найдите все пары действительных чисел  $x, y$ , удовлетворяющих уравнению

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{2y}.$$

3. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  отмечены середины последовательных сторон:  $M, N, K, L$ . Найдите площадь четырехугольника  $MNKL$ , если  $|AC| = |BD| = 2a$ ,  $|MK| + |NL| = 2b$ .
4. В таблице  $25 \times 25$  расставлены целые числа от 1 до 25, причем в каждой строке встречается весь набор чисел. Таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол. Докажите, что на этой диагонали также встречаются все числа от 1 до 25.
5. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность целых чисел, в которой каждый элемент с нечетным номером (начиная с третьего) есть среднее арифметическое, а каждый элемент с четным номером – среднее геометрическое соседних с ним членов?