Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике
2020-2021 учебный год
10 класс

1. 1.1. Сколько слагаемых должно содержаться под корнем

$$\sqrt[3]{3^3+3^3+...+3^3}=3^3+3^3,$$

чтобы выполнялось равенство?

Ответ: 5832.

Решение.

Пусть под корнем n слагаемых. Тогда $\sqrt[3]{n\cdot 3^3}=54$. Возведем обе части в куб, получим $27n=54^3$. Отсюда $n=5832$.

1.2. Сколько слагаемых должно содержаться под корнем

$$\sqrt[3]{7^3+7^3+...+7^3}=7^2+7^2,$$

чтобы выполнялось равенство?

Ответ: 2744

1.3. Сколько слагаемых должно содержаться под корнем

$$\sqrt[3]{5^3+5^3+...+5^3}=5^3+5^3,$$

чтобы выполнялось равенство?

Ответ: 125000

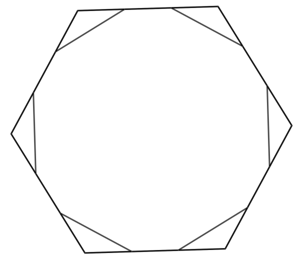
1.4. Сколько слагаемых должно содержаться под корнем

$$\sqrt[3]{6^3+6^3+...+6^3}=6^2+6^2,$$

чтобы выполнялось равенство?

Ответ: 1728

2. 2.1. Винни-Пух решил подарить Пятачку на день рождения торт в форме правильного шестиугольника. В пути он проголодался и отрезал от торта 6 кусочков, каждый из которых содержит одну вершину и треть стороны (см. рисунок). В результате он вручил Пятачку торт весом 900 граммов. Сколько граммов торта Винни-Пух съел по дороге?

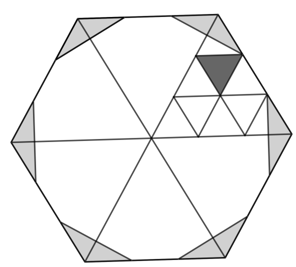


Ответ: 100.

Решение.

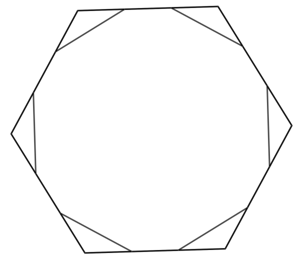
1 способ. Докажем, что вес исходного торта в 9 раз больше веса отрезанной части. Будем считать торт плоским и найдем разность площадей исходного торта и отрезанной части. Пусть сторона шестиугольника равна $3a$. Так как углы правильного шестиугольника по $120°$, то каждый отрезанный кусок имеет площадь $S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда 6 отрезанных кусков имеют суммарную площадь $6S = \frac{1}{2} \cdot a^2 3\sqrt{3}$. А площадь правильного шестиугольника в 6 раз больше, чем площадь равностороннего треугольника со стороной $3a$ (если центр правильного шестиугольника соединить с вершинами, то он разбивается на 6 равносторонних треугольников). Следовательно его площадь равна $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 3\sqrt{3}$, т.е. в 9 раз больше площади отрезанной части. Таким образом, Винни-Пух съел 1/9 часть торта, т.е. 100 г.

2 способ. Разобьем исходный шестиугольный торт на 6 равносторонних треугольников, а каждый из шести полученных треугольников на 9 треугольников, которые назовем единичными (на рисунке закрашен).



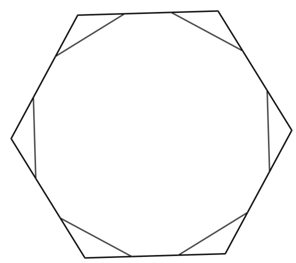
Теперь видим, что каждый отрезанный кусок торта равен по площади единичному треугольнику. Значит общая площадь шестиугольника в 9 раз больше площади отрезанных кусков.

2.2. Винни Пух решил подарить Пятачку на день рождения торт в форме правильного шестиугольника. В пути он проголодался и отрезал от торта 6 кусочков, каждый из которых содержит одну вершину и треть стороны (см. рисунок). В результате он вручил Пятачку торт весом 1350 граммов. Сколько граммов торта Винни-Пух съел по дороге?



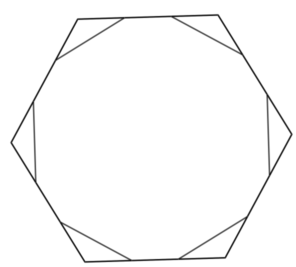
Ответ: 168.75.

2.3. Винни Пух решил подарить Пятачку на день рождения торт в форме правильного шестиугольника. В пути он проголодался и отрезал от торта 6 кусочков, каждый из которых содержит одну вершину и треть стороны (см. рисунок). В результате он вручил Пятачку торт весом 1800 граммов. Сколько граммов торта Винни-Пух съел по дороге?



Ответ: 225.

2.4. Винни Пух решил подарить Пятачку на день рождения торт в форме правильного шестиугольника. В пути он проголодался и отрезал от торта 6 кусочков, каждый из которых содержит одну вершину и треть стороны (см. рисунок). В результате он вручил Пятачку торт весом 1620 граммов. Сколько граммов торта Винни-Пух съел по дороге?



Ответ: 202.5.

3. 3.1. Найдите количество четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (каждая цифра используется не более одного раза), которые делятся на 15.

Ответ: 36.

Решение.

Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться на 3 и на 5. Поэтому, по признаку делимости на 5, последней цифрой может быть только 5. Сумма цифр числа должна делиться на 3. Для этого первые три цифры в сумме должны давать остаток 1 при делении на 3 (так как 5 дает остаток 2 при делении на 3). Вычеркнем 5 и заменим числа на их остатки при делении на 3: 1, 2, 0, 1, 0, 1. Получить остаток 1 можно, если

1) выбрать две единицы и двойку (3 способа);

2) выбрать единицу и два нуля (3 способа).

Всего 6 способов. Заметим, что никакой из способов мы не посчитали дважды. Выбранные 3 цифры можно переставить в числе $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Таким образом, всего таких чисел $6 \cdot 6 = 36$.

3.2. Найдите количество четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (каждая цифра используется не более одного раза), которые делятся на 15.

Ответ: 42.

3.3. Найдите количество четырехзначных чисел, составленных из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (каждая цифра используется не более одного раза), которые делятся на 15.

Ответ: 36.

3.4. Найдите количество четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 (каждая цифра используется не более одного раза), которые делятся на 15.

Ответ: 42.

4. 4.1. В прямоугольном треугольнике ABC (прямой угол C) проведена биссектриса BK. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CKL = \angle ABC/2$. Найдите KB, если $AB = 18, BL = 8$.

Ответ: 12.

Решение.

Заметим, что $\angle LKB = \angle CKB - \angle CKL = \angle CAB + \angle ABK - \angle CKL$ (последнее в силу того, что $\angle CKB$ – внешний для треугольника ABK). Поскольку $\angle CKL = \angle ABC/2 = \angle ABK$ имеем, что $\angle LKB = \angle CAB$. Из того, что $\angle ABK = \angle KBL$ заключаем, что треугольники KLB и AKB подобны по двум углам. Получаем равенство отношений $\frac{KB}{BL} = \frac{AB}{KB}$. Следовательно, $KB = \sqrt{BL \cdot AB} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$.

4.2. В прямоугольном треугольнике ABC (прямой угол C) проведена биссектриса BK. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CKL = \angle ABC/2$. Найдите KB, если $AB = 45, BL = 20$.

Ответ: 30.

4.3. В прямоугольном треугольнике ABC (прямой угол C) проведена биссектриса BK. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CKL = \angle ABC/2$. Найдите KB, если $AB = 27, BL = 12$.

Ответ: 18.

4.4. В прямоугольном треугольнике ABC (прямой угол C) проведена биссектриса BK. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CKL = \angle ABC/2$. Найдите KB, если $AB = 40, BL = 10$.

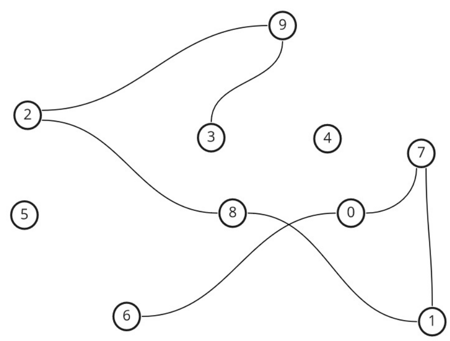
Ответ: 20.

5. 5.1. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны и каждые две соседние отличаются на 6 или 7.

   Ответ: 60718293.

   Решение.

   Сопоставим каждой цифре от 0 до 9 вершину графа и соединим вершины ребром, если соответствующие им цифры отличаются на 6 или 7.



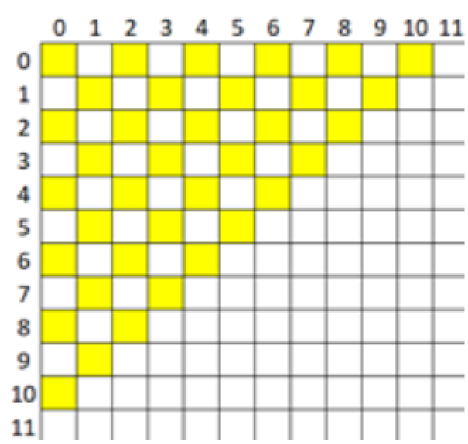
   Мы видим, что вершины, соответствующие цифрам 4 и 5, ни с чем не соединены, поэтому максимальное число, которое можно получить, будет 8-значным. Вершины, соответствующие цифрам 3 и 6, могут быть только первыми или последними в числе. Так как требуется найти максимальное число, то оно определяется однозначно, двигаясь по ребрам графа, и будет равно 60718293.

6. 6.1. Фигура «хромая ладья» за один ход может переместиться на соседнюю по стороне клетку. На доске 20×20 крестик поставили во все клетки, на которые «хромая ладья» может добраться из левого верхнего угла ровно за 10 ходов. Сколько клеток пометили крестиком?

   Ответ: 36.

   Решение.

   Зададим систему координат так, чтобы левая верхняя клетка имела координаты $(0, 0)$. За один ход сумма координат ладьи меняется на 1. За 10 ходов сумма координат не может стать больше 10, и при этом она станет четным числом.



Таким образом, только закрашенные на рисунке клетки могут быть помечены крестиком. Очевидно, что закрашенные клетки будут помечены. Их количество равно 36. 6.2. Фигура "хромая ладья"за один ход может переместиться на соседнюю по стороне клетку. На доске 20×20 крестик поставили во все клетки, на которые "хромая ладья"может добраться из левого верхнего угла ровно за 12 ходов. Сколько клеток пометили крестиком?

Ответ: 49.

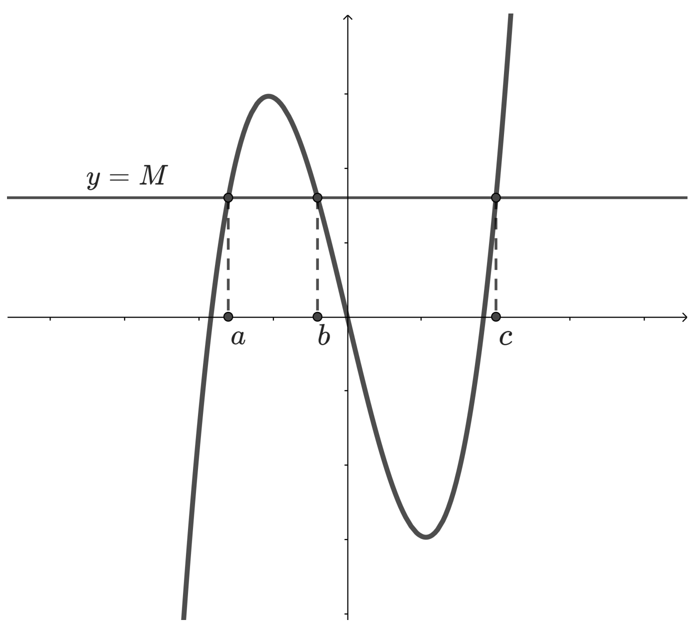
6.3. Фигура "хромая ладья"за один ход может переместиться на соседнюю по стороне клетку. На доске 20×20 крестик поставили во все клетки, на которые "хромая ладья"может добраться из левого верхнего угла ровно за 9 ходов. Сколько клеток пометили крестиком?

Ответ: 30.

6.4. Фигура "хромая ладья"за один ход может переместиться на соседнюю по стороне клетку. На доске 20×20 крестик поставили во все клетки, на которые "хромая ладья"может добраться из левого верхнего угла ровно за 11 ходов. Сколько клеток пометили крестиком?

Ответ: 42.

7. 7.1. Прямая $y = M$ пересекает график функции $y = x^3 - 84x$ в точках с абсциссами a, b и c ($a < b < c$, см. рисунок). При этом оказалось, что расстояние между a и b вдвое меньше расстояния между b и c. Найдите M.



Ответ: 160.

Решение.

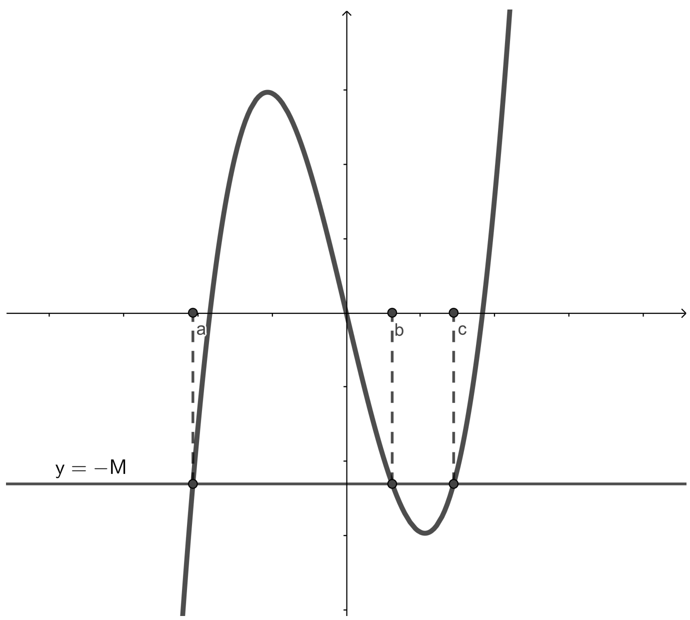
1 способ. Так как координаты точек пересечения a, b и c удовлетворяют уравнению $x^3 - 84x - M = 0$, то по теореме Виета имеем следующие равенства: $a + b + c = 0$ (1), $ab + bc + ac = -84$ (2), $abc = M$ (3). По условию $2(b - a) = c - b$ или $3b = c + 2a$. С учетом (1), $c = -5b, a = 4b$. Подставим в (2): $-5b^2 + 4b^2 - 20b^2 = -84$, откуда найдем $b^2 = 4$. Учитывая, что a и b - отрицательные, $b = -2$, $a = -8$, $c = 10$. Подставляем в (3) $M = (-2) \cdot (-8) \cdot 10 = 160$.

2 способ. Подставим вместо x в уравнение кубического многочлена точки a, b, c и получим $a^3 - 84a = M, b^3 - 84b = M, c^3 - 84c = M (1)$. Вычтем из второго равенства первое, из третьего второе, из первого третье и, поделив получившиеся равенства на $b - a$, $c - b$ и $a - c$, соответственно, получим следующие равенства: $a^2 + ab + b^2 = 84, b^2 + bc + c^2 = 84, a^2 + ac + c^2 = 84$. Вычтем из второго первое, получим $b^2 - a^2 + b(c - a) + c^2 - b^2 = 0$. После приведения подобных и деления на $c - a$ получим равенство $a + b + c = 0$ (2).

По условию $2(b - a) = c - b$ или $3b = c + 2a$. С учетом (2), $a = 4b, c = -5b$.

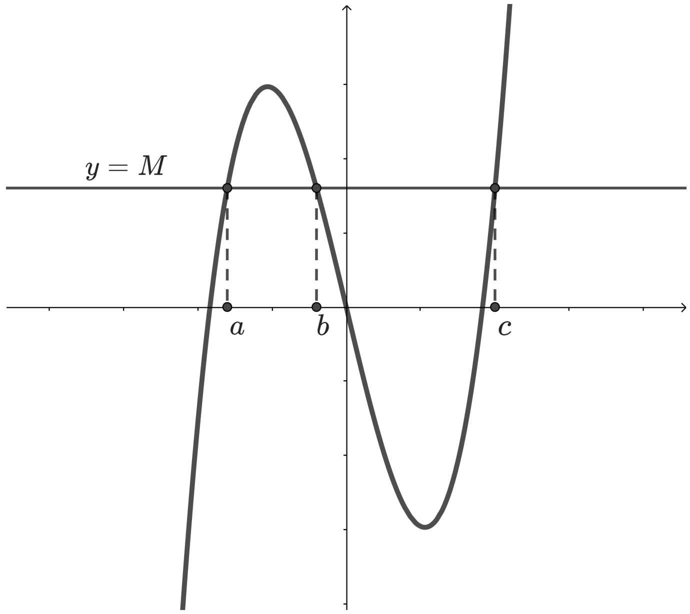
Сложим равенства (1) $a^3 + b^3 + c^3 - 84(a + b + c) = 3M$ при этом, с учетом (2), получим $a^3 + b^3 + c^3 = 3M$. Подставим полученные ранее значения вместо a и c, тогда $-125b^3 + b^3 + 64b^3 = 3M$, отсюда $M = -20b^3$. Подставим найденное M в выражение (1): $b^3 - 84b = -20b^3$. Решая это уравнение относительно b, с учетом того, что $b < 0$, получим $b = -2$. Тогда $M = 160$.

7.2. Прямая $y = -M$ пересекает график функции $y = x^3 - 156x$ в точках с абсциссами a, b и c ($a < b < c$, см. рисунок). При этом оказалось, что расстояние между b и c вчетверо меньше расстояния между a и c. Найдите M.



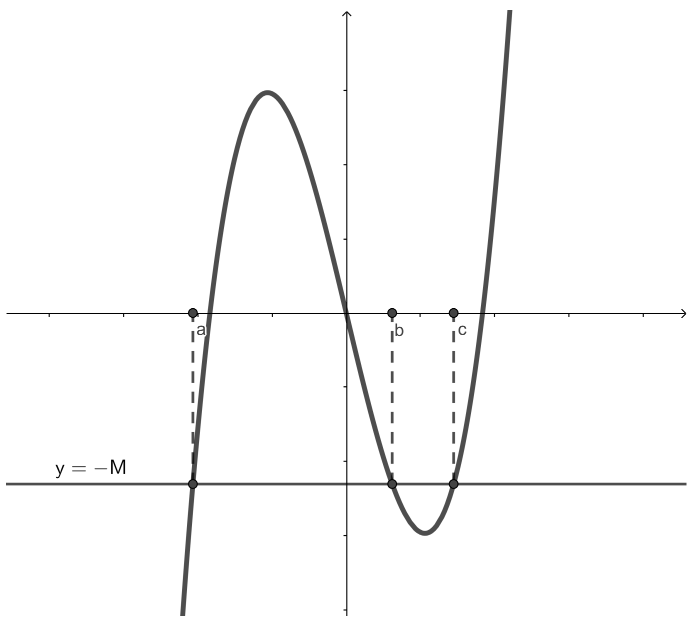
Ответ: 560.

7.3. Прямая $y = M$ пересекает график функции $y = x^3 - 189x$ в точках с абсциссами a, b и c ($a < b < c$, см. рисунок). При этом оказалось, что расстояние между a и b вдвое меньше расстояния между b и c. Найдите M.



Ответ: 540.

7.4. Прямая $y = -M$ пересекает график функции $y = x^3 - 39x$ в точках с абсциссами a, b и c ($a < b < c$, см. рисунок). При этом оказалось, что расстояние между b и c вчетверо меньше расстояния между a и c. Найдите M.



Ответ: 70.

8. 8.1. Сколько существует возрастающих арифметических прогрессий из 22 различных натуральных чисел, в которых все числа не больше 1000?

Ответ: 23312.

Решение.

Рассмотрим 22-й член каждой такой прогрессии, он будет иметь вид $a_{22} = a_1 + 21d$. Это означает, что a_1 и a_{22} будут иметь одинаковые остатки при делении на 21. Каждая пара чисел, не больших 1000, дающих при делении на 21 одинаковые остатки определяет одну из прогрессий нужного вида, так как для построения прогрессии достаточно разделить на числовой прямой отрезок между a_1 и a_{22} на 21 равную часть. Найдем количество таких пар. Так как $1000 = 21 \cdot 47 + 13$, то 13 остатков встречаются 48 раз и 8 остатков – 47 раз. Тогда количество нужных нам прогрессий будет равно $13 \cdot C_{48}^2 + 8 \cdot C_{47}^2 = \frac{13 \cdot 48 \cdot 47}{2} + \frac{8 \cdot 47 \cdot 46}{2} = 23312$.

8.2. Сколько существует возрастающих арифметических прогрессий из 23 различных натуральных чисел, в которых все числа не больше 1000?

Ответ: 22230.

8.3. Сколько существует возрастающих арифметических прогрессий из 24 различных натуральных чисел, в которых все числа не больше 1000?

Ответ: 21242.

8.4. Сколько существует возрастающих арифметических прогрессий из 25 различных натуральных чисел, в которых все числа не больше 1000?

Ответ: 20336.