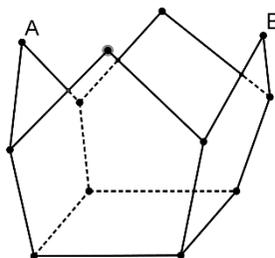


Работа рассчитана на 235 минут

1. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2} = y - 1; \\ \sqrt{2y^2 + 2} = z - 1; \\ \sqrt{2z^2 + 2} = x - 1. \end{cases}$$

2. Доказать, что если $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, то
$$\cos^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{y}{2} + \cos^4 \frac{z}{2} = \sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{y}{2} + \sin^4 \frac{z}{2}.$$

3. Из четырёх правильных пятиугольников со стороной 1 и квадрата склеили коробку (см. рис.) Найти расстояние между точками А и В.



4. Найти наибольшее С такое, что для всех $y \geq 4x > 0$ выполняется неравенство $x^2 + y^2 \geq Cxy$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка D на стороне AC такова, что радиус вписанной окружности треугольника ABD равен радиусу внеписанной окружности треугольника CBD, касающейся стороны CD. Доказать, что длина этих радиусов составляет четверть длины высоты, опущенной из точки C в треугольнике ABC.

6. Для натурального числа n $G(n)$ обозначает количество натуральных чисел m , для которых $m+n$ делит mn . Найти $G(10^k)$.