

Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 минут (240 минут).

Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Задание 11.1

Существует ли такая функция $f(x)$, определённая для всех действительных чисел, что $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x$?

Количество баллов 7

Задание 11.2

В каждую клетку квадратной таблицы $2021 \cdot 2021$ вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 4042 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

Количество баллов 7

Задание 11.3

В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?

Количество баллов 7

Задание 11.4

Две окружности пересекаются в точках A и B . Оказалось, что радиусы OA и OB первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку A проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках M и N . Докажите, что $MB \perp NB$.

Количество баллов 7

Задание 11.5

Доказать, что для любого натурального n

$$\frac{1}{3+1^2} + \frac{1}{3+2^2} + \frac{1}{3+3^2} + \dots + \frac{1}{3+n^2} < \frac{4}{5}$$

Количество баллов 7