

11 класс

1. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Ростов»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» - 50%, а про ЦСКА - 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Ростов»?
2. Можно ли таблицу размером $n \times n$ заполнить числами $-1, 0, 1$ так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различными? Главными диагоналями таблицы называются диагонали, проведённые из левого верхнего угла таблицы в правый нижний и из правого верхнего угла таблицы в левый нижний.
3. Докажите, что если $a^2 + pa + q = 0$ и $b^2 - pb - q = 0$, где $q \neq 0$, то уравнение $x^2 + 2px + 2q = 0$ имеет корень, заключённый между числами a и b .
4. Пусть четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B, D , а также середины M и N отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?
5. Ученик нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причем 50 из них рациональные, а 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около ее строки и ее столбца (как в таблице умножения). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могло оказаться рациональными числами?