

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
2020/21 учебный год
11 класс**

Дорогой друг! Желаем успеха!

Инструкция для учащихся

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удастся выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!

Задания (максимальный балл за всю работу – 42)

1. Докажите, что если $\sin x > 0,9$, то $|\sin 2x| < 0,9$.

2. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны 1, 2 и 4. Докажите, что треугольник, лежащий в основании пирамиды, не является равносторонним.

3. Все целые числа от 1 до $2n$ выписали в строку в случайном порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

4. В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Докажите, что найдётся прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

5. Последовательность натуральных чисел $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$ такова, что $q_n < 2n$ для любого номера n . Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел из этой последовательности или как число из самой последовательности.

6. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ задана формулами: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{na_n}}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Докажите, что эта последовательность не ограничена (например, все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, больше миллиона).