

Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике

для 3 класса

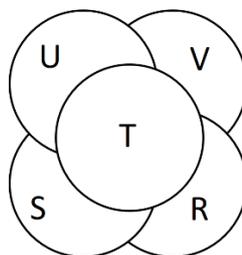
2020/21 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Каждое точное совпадение ответа — 1 балл

Задание №1

1.1. Ваня положил на стол пять одинаковых круглых шоколадок. Получилась так, как изображено на рисунке. В каком порядке были разложены шоколадки?



V, R, S, U, T

U, R, V, S, T

R, S, U, V, T

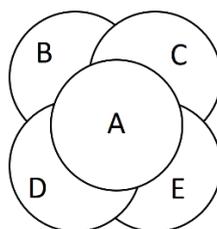
T, U, R, V, X

V, R, U, S, T

Ответ: V, R, S, U, T

Решение. Можно начать снимать шоколадки с конца. Сверху лежит T, далее U. Значит, ответ заканчивается на ..., U, T. Под этот критерий подходит только первый вариант.

1.2. Ваня положил на стол пять одинаковых круглых шоколадок. Получилась так, как изображено на рисунке. В каком порядке были разложены шоколадки?



B, D, E, C, A

E, A, C, B, D

B, C, E, D, A

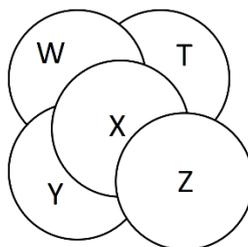
A, B, C, E, D

D, B, C, E, A

Ответ: B, C, E, D, A

Решение. Можно начать снимать шоколадки с конца. Сверху лежит А, далее D. Значит, ответ заканчивается на ..., D, А, и под этот критерий подходит только третий вариант.

1.3. Ваня положил на стол пять одинаковых круглых шоколадок. Получилась так, как изображено на рисунке. В каком порядке были разложены шоколадки?



T, X, Y, W, Z

X, Z, W, T, Y

Y, X, T, Z, W

T, W, Y, X, Z

Z, X, T, Y, W

Ответ: T, W, Y, X, Z

Решение. Можно начать снимать шоколадки с конца. Сверху лежит Z, далее X. Значит, ответ заканчивается на ..., X, Z, и под этот критерий подходит только пункт (d).

Задание №2

2.1. Завод за 1 минуту производит 2 литра белой краски и 1 литр пурпурной краски, а других красок он не производит. Чтобы получить 8 литров лиловой краски, надо смешать 5 литров белой краски и 3 литра пурпурной. Сколько часов надо работать заводу, чтобы произвести продукцию, достаточную для получения 800 литров лиловой краски?

Ответ: 5

Решение. Для получения 800 л лиловой краски требуется 500 л белой краски и 300 л пурпурной краски. Белую краску завод произведет за $500 : 2 = 250$ минут, а пурпурную за $300 : 1 = 300$ минут. Так как завод производит краски разных цветов одновременно, всего потребуется 300 минут.

2.2. Завод за 1 минуту производит 3 литра белой краски и 2 литра пурпурной краски, а других красок он не производит. Чтобы получить 21 литр лиловой краски, надо смешать 9 литров белой краски и 12 литров пурпурной. Сколько часов надо работать заводу, чтобы произвести продукцию, достаточную для получения 210 литров лиловой краски?

Ответ: 1

Решение. Для получения 210 л лиловой краски требуется 90 л белой краски и 120 л пурпурной краски. Белую краску завод произведет за $90 : 3 = 30$ минут, а пурпурную за $120 : 2 = 60$ минут. Так как завод производит краски разных цветов одновременно, всего потребуется 60 минут.

2.3. Завод за 1 минуту производит 1 литр белой краски и 4 литра пурпурной краски, а других красок он не производит. Чтобы получить 7 литров лиловой краски, надо смешать 1 литр белой краски и 6 литров пурпурной. Сколько минут надо работать заводу, чтобы произвести продукцию, достаточную для получения 700 литров лиловой краски?

Ответ: 150

Решение. Для получения 700 л лиловой краски требуется 100 л белой краски и 600 л пурпурной краски. Белую краску завод произведет за $100 : 1 = 100$ минут, а пурпурную за $600 : 4 = 150$ минут. Так как завод производит краски разных цветов одновременно, всего потребуется 150 минут.

Задание №3

3.1. Скажем, что число A скрывает в себе число B , если из A можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить B (например, число 123 скрывает в себе числа 1, 2, 3, 12, 13, 23 и 123). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе числа 2020, 2021 и 2022.

Натуральные числа — это числа, используемые для счета предметов.

Ответ: 202012

Решение. В ответе должно быть обязательно три двойки (для числа 2022), два нуля (для числа 2020) и хотя бы одна единица (для числа 2021). При этом единица и второй ноль должны находиться, на четвертой позиции с начала или дальше. Перед нулем и единицей должны идти цифры 2, 0 и 2 именно в таком порядке. Получаем ответ: 202012.

3.2. Скажем, что число A скрывает в себе число B , если из A можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить B (например, число 123 скрывает в себе числа 1, 2, 3, 12, 13, 23 и 123). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе числа 1021, 2021 и 3021.

Натуральные числа — это числа, используемые для счета предметов.

Ответ: 123021

Решение. В ответе должно быть обязательно две двойки (для числа 2021), две единицы (для числа 1021), хотя бы одна тройка (для числа 3021) и хотя бы один ноль. При этом тройка должна быть на месте, которое левее третьего разряда, а ноль должен стоять правее тройки. После тройки и нуля должны идти цифры 2 и 1 именно в таком порядке. Получаем ответ: 123021.

3.3. Скажем, что число A скрывает в себе число B , если из A можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить B (например, число 123 скрывает в себе числа 1, 2, 3, 12, 13, 23 и 123). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе числа 2011, 2021 и 2031.

Натуральные числа — это числа, используемые для счета предметов.

Ответ: 201231

Решение. В ответе должно быть обязательно две двойки (для числа 2021), две единицы (для числа 2011), хотя бы одна тройка (для числа 2031) и хотя бы один ноль. При этом одна единица должна стоять в разряде единиц, число должно начинаться с двойки, а ноль может стоять только правее двойки. После двойки и нуля и перед последней единицей должны идти цифры 1, 2 и 3 именно в таком порядке. Получаем ответ: 201231.

Задание №4

4.1. Учительница спросила троих учеников, сколько, по их мнению, ей лет. Первый ответил, что 22 года, второй — что 25, а третий — что ей 30 лет. Оказалось, что кто-то из них ошибся на 2 года, кто-то на 3, а кто-то — на 5 лет. Сколько лет учительнице? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 27

Решение. Разница между предположениями первого ученика и третьего составляет 8 лет. Это означает, что сумма их ошибок должна быть не менее 8, что возможно только в случае, когда они делают ошибки в 3 и 5. При этом тот, кто говорит 22, ошибается в меньшую сторону, а тот, кто говорит 30 — в большую. Остается два варианта — $22 + 3 = 25$ лет или $22 + 5 = 27$ лет. Если бы учительнице было 25 лет, то второй ученик бы не ошибся. В случае, если учительнице 27 лет, второй ученик ошибся на 2 года. Следовательно, 27 лет является правильным ответом.

4.2. Учительница спросила троих учеников, сколько, по их мнению, ей лет. Первый ответил, что 40, второй — что 43, а третий — что ей 47 лет. Оказалось, что кто-то из них ошибся на 1 год, кто-то на 3, а кто-то — на 4. Сколько лет учительнице? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 44

Решение. Разница между предположениями первого ученика и третьего составляет 7 лет. Это означает, что сумма их ошибок должна быть не менее 7, что возможно только в случае, когда они делают ошибки в 4 и 3. При этом тот, кто говорит 40, ошибается в меньшую сторону, а тот, кто говорит 47 — в большую. Остается два варианта — $40 + 3 = 43$ года или $40 + 4 = 44$ года. Если бы учительнице было 43 года, то второй ученик бы не ошибся. В случае, если учительнице 43 года, второй ученик ошибся на 1 год. Следовательно, 43 года является правильным ответом.

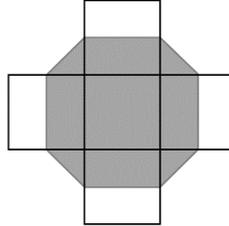
4.3. Учительница спросила троих учеников, сколько, по их мнению, ей лет. Первый ответил, что 31, второй — что 33, а третий — что ей 40 лет. Оказалось, что кто-то из них ошибся на 2 года, кто-то на 4, а кто-то — на 5 лет. Сколько лет учительнице? Найдите все возможные ответы.

Ответ: 35

Решение. Разница между предположениями первого ученика и третьего составляет 9 лет. Это означает, что сумма их ошибок должна быть не менее 9, что возможно только в случае, когда они делают ошибки в 4 и 5. При этом тот, кто говорит 31, ошибается в меньшую сторону, а тот, кто говорит 40 — в большую. Остается два варианта — $31 + 4 = 35$ года или $31 + 5 = 36$ года. Если бы учительнице было 36 лет, то второй ученик ошибся бы на 3 года. В случае, если учительнице 35 года, второй ученик ошибся на 2 года. Следовательно, 35 лет является правильным ответом.

Задание №5

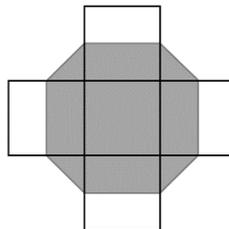
5.1. На рисунке изображено пять одинаковых квадратов, площадь каждого квадрата равна 4 см^2 . Вершины закрашенного многоугольника являются серединами сторон квадратов. Найдите площадь серого восьмиугольника.



Ответ: 14

Решение. Внутри серого многоугольника есть квадрат, его площадь 4 см^2 . Из четырех прямоугольников можно сложить еще два квадрата, площадь которых составит 8 см^2 . Оставшиеся прямоугольные треугольники можно по две штуки сложить в два маленьких квадрата, каждый из которых составляет четверть большого. Их суммарная площадь равна $2 \cdot (4 : 4) = 2 \text{ см}^2$. Складывая все площади, получим ответ 14 см^2 .

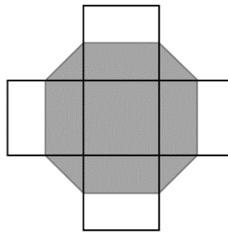
5.2. На рисунке изображено пять одинаковых квадратов, площадь каждого квадрата равна 16 см^2 . Вершины закрашенного многоугольника являются серединами сторон квадратов. Найдите площадь серого восьмиугольника.



Ответ: 56

Решение. Внутри серого многоугольника есть квадрат, его площадь 16 см^2 . Из четырех прямоугольников можно сложить еще два квадрата, площадь которых составит 32 см^2 . Оставшиеся прямоугольные треугольники можно по две штуки сложить в два маленьких квадрата, каждый из которых составляет четверть большого. Их суммарная площадь равна $2 \cdot (16 : 4) = 8 \text{ см}^2$. Складывая все площади, получим ответ 56 см^2 .

5.3. На рисунке изображено пять одинаковых квадратов, площадь каждого квадрата равна 36 см^2 . Вершины закрашенного многоугольника являются серединами сторон квадратов. Найдите площадь серого восьмиугольника.



Ответ: 126

Решение. Внутри серого многоугольника есть квадрат, его площадь 36 см^2 . Из четырех прямоугольников можно сложить еще два квадрата, площадь которых составит 72 см^2 . Оставшиеся прямоугольные треугольники можно по две штуки сложить в два маленьких квадрата, каждый из которых составляет четверть большого. Их суммарная площадь равна $2 \cdot (36 : 4) = 18 \text{ см}^2$. Складывая все площади, получим ответ 126 см^2 .

Задание №6

6.1. В головоломке необходимо расставить цифры 1, 2, 3, 4 по одной в клетку так, чтобы ни в одном столбце и ни в одной строке цифры не повторялись, при этом пять цифр уже стоит. Чему равна сумма цифр в серых клетках?

	2		
1			
2			3
		1	

Ответ: 13

Решение. Таблица заполняется однозначно, например, в таком порядке. В клетке левее клетки с цифрой 3 может стоять только 4 (иначе число повторится в строке или столбце). В клетке левее клетки с цифрой 4 будет находиться 1 по аналогичной причине. На доске уже находятся три 1, ставим последнюю в правый верхний угол. Затем можно поставить 2 в правый нижний угол (в нижней строке её ставить больше некуда). Далее — поставить последнюю 2. После этого каждое следующее число можно ставить в ту линию, где уже находятся три аналогичных числа. Итоговая сумма равна $4 + 3 + 4 + 2 = 13$.

4	2	3	1
1	3	2	4
2	1	4	3
3	4	1	2

6.2. В головоломке необходимо расставить цифры 1, 2, 3, 4 по одной в клетку так, чтобы ни в одном столбце и ни в одной строке цифры не повторялись, при этом пять цифр уже стоит. Чему равна сумма цифр в серых клетках?

	1	2	
			1
2			
	4		

Ответ: 9

Решение. Таблица заполняется однозначно, например, в таком порядке. В клетке над 4 может стоять только число 3 (иначе число повторится в строке или столбце). В клетке над клеткой с числом 3 стоит 2 по той же причине. Под самой правой 1 может стоять только 4. В этом же ряду единственная свободная клетка заполнится 1. Последняя единица может

4	1	2	3
3	2	4	1
2	3	1	4
1	4	3	2

встать только в левую нижнюю клетку. Аналогично, оставшаяся двойка может стоять только в правом нижнем углу. В нижнем ряду остается лишь одна свободная клетка, в которую вписывается 3. В горизонтальном ряду, содержащем эту клетку, остается только 4. Остальные три клетки заполняются аналогичным образом. Итоговая сумма равна $4 + 2 + 1 + 2 = 9$.

6.3. В головоломке необходимо расставить цифры 1, 2, 3, 4 по одной в клетку так, чтобы ни в одном столбце и ни в одной строке цифры не повторялись, при этом пять цифр уже стоит. Чему равна сумма цифр в серых клетках?

	2		
4			
			3
	3	4	

Ответ: 7

Решение. Таблица заполняется однозначно, например, в таком порядке. В клетке под клеткой с числом 2 может стоять только 1 (иначе в строке или столбце повторится цифра). Под этой 1 однозначно будет находиться 4 (единственная клетка в столбце). Клетка над самой правой тройкой может содержать лишь 2, иначе конфликт возникает в строке или в столбце.

3	2	1	4
4	1	3	2
1	4	2	3
2	3	4	1

Слева от 2 однозначно находится 3 (единственная клетка в строке). Над 3 стоит 1 (строка или столбец), значит, под 3 однозначно 2. В этой же строке (вторая снизу) в самой левой клетке стоит 1. Под этой единицей стоит 2 (строка или столбец). Таким образом, в правой нижней клетке будет стоять 1, а в левой верхней — 3. Итоговая сумма равна $3 + 1 + 2 + 1 = 7$

Задание №7

7.1. На планете Плюк месяц составляет ровно 30 дней, причем первые 10 дней всегда светит солнце, следующие 10 дней идет дождь, а последние 10 дней идет снег. Космонавт записывает в дневник наблюдений фразу: «Сегодня и следующие три дня погода будет такая же, как и два дня назад». Сколько раз за месяц он сможет записать такую фразу?

Ответ: 15

Решение. В день, когда фраза записана, погода стоит точно такая же, как и два дня назад. Следовательно, фраза записана не раньше, чем на 3-й день. Но с другой стороны, такая же погода должна стоять еще 4 дня, значит, фраза записана не позже, чем на 7-й день. Нам подходят 3-й, 4-й, 5-й, 6-й и 7-й дни, видов погоды бывает только три. Итого ответ $5 \cdot 3 = 15$ дней.

7.2. На планете Плюк месяц составляет ровно 36 дней, причем первые 12 дней всегда светит солнце, следующие 12 дней идет дождь, а последние 12 дней идет снег. Космонавт записывает в дневник наблюдений фразу: «Сегодня и следующие четыре дня погода будет такая же, как и два дня назад». Сколько раз за месяц он сможет записать такую фразу?

Ответ: 18

Решение. В день, когда фраза записана, погода стоит точно такая же, как и два дня назад. Следовательно, фраза записана не раньше, чем на 3-й день. Но с другой стороны, такая же погода должна стоять еще 6 дней, значит, фраза записана не позже, чем на 8-й день. Нам подходят 3-й, 4-й, 5-й, 6-й, 7-й и 8-й дни, а погод бывает только три. Итого ответ $6 \cdot 3 = 18$ дней.

7.3. На планете Плюк месяц составляет ровно 44 дня, причем первые 11 дней всегда светит солнце, вторые 11 дней идет дождь, третьи 11 дней облачно, а последние 11 дней идет снег. Космонавт записывает в дневник наблюдений фразу: «Сегодня и следующие два дня погода будет такая же, как и два дня назад». Сколько раз за месяц он сможет записать такую фразу?

Ответ: 28

Решение. В день, когда фраза записана, погода стоит точно такая же, как и три дня назад. Следовательно, фраза записана не раньше, чем на 3-й день. Но с другой стороны, такая же погода должна стоять еще 3 дня, значит, фраза записана не позже, чем на 9-й день. Нам подходят 3-й, 4-й, 5-й, 6-й, 7-й, 8-й и 9-й дни, а погод бывает только четыре. Итого ответ $7 \cdot 4 = 28$ дней.

Задание №8

8.1 На острове Правды живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 12 человек с этого острова выстроились в круг, и каждый сказал: «Среди тех, кто стоит через одного человека от меня, есть лжец». Сколько лжецов может стоять в кругу? Найдите все ответы.

Ответ: 4, 5, 6

Решение №1.

В круге три лжеца не могут стоять подряд, так как при этом условии крайние говорили бы правду. Следовательно, лжецы стоят по одному или по двое. Один рыцарь не может находиться в окружении лжецов, тогда его соседи говорили бы правду, что является противоречием. Пять рыцарей тоже не могут стоять подряд, при этом условии рыцарь посередине говорил бы неправду. Значит, рыцари стоят группами по 2, 3 или 4 человека. Так как группы лжецов содержат максимум по два человека, а группы рыцарей — не менее двух, то лжецов не больше половины, т.е. 6 человек. Если же лжец стоит один, то рядом с ним не может стоять группа из трех рыцарей (РЛРРР), так как тогда его сосед-рыцарь (выделен жирным) говорит правду. Значит, если лжец один, то рядом с ним группы только из двух рыцарей. Следовательно, на любую группу лжецов справа стоит группа из рыцарей, которая больше не более чем в два раза, а значит, лжецов не меньше трети от всех.

Решение №2.

Рассмотрим 6 островитян, сидящих через одного. Соседей через одного назовем «соседями». Заметим, что если все они рыцари, то условие не выполняется. Тогда там есть лжец, у которого два рыцаря-«соседа». У левого рыцаря второй «сосед» является либо рыцарем, либо лжецом. Если он лжец, то следом за ним снова сидит рыцарь, после которого обязан сидеть лжец. При такой рассадке среди шести островитян три лжеца. Если он рыцарь, то следом за ним по условию сидит лжец, за которым, опять же, рыцарь. В этом случае среди 6 островитян 2 лжеца.

Таким образом, если мы рассмотрим островитян при помощи чётных и нечётных номеров, получится, что всего лжецов либо $2 + 2 = 4$, либо $2 + 3 = 5$ (или $3 + 2$), либо $3 + 3 = 6$.

Пример на 4 лжеца: ЛЛРРРРЛЛРРРР.

Пример на 5 лжецов: ЛРРЛЛРРРЛЛРР

Пример на 6 лжецов: ЛЛРРЛЛРРЛЛРР