

Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике

для 5 класса

2020/21 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Каждое точное совпадение ответа — 1 балл

Задание №1

1.1. У Полины есть две закрытые коробки — квадратная и круглая. Ей сообщили, что в круглой лежат 4 белых и 6 черных шаров, а в квадратной — 10 черных. За одно действие Полина может не глядя достать шар из любой коробки и либо выбросить его, либо переложить в другую коробку. Полина хочет сделать так, чтобы в коробках было одинаковое содержимое. За какое минимальное количество действий Полина сможет гарантированно это сделать?



Ответ: 15

Решение. Допустим, что в итоге в обеих коробках остались и белые, и черные шары. Тогда последним действием Полина достала шар определенного цвета из какой-то коробки, а там остались и черные, и белые. Но она не могла этого сделать гарантированно, т.е. ей постоянно мог попадаться шар не того цвета. Следовательно, в конце останутся шары одного цвета, а другой цвет надо убрать. Если мы достали шар из какой-то коробки и положили обратно, действие ни на что не повлияло, значит, с каждым доставанием необходимо перекладывать или убирать.

Если убирать черные шары, то потребуется минимум 16 действий, а если белые — минимум 10 действий, так как белые могут попасться только на дне первой коробки. При этом останется от 10 до 16 черных шаров во второй коробке, и, чтобы их разделить, потребуется еще минимум 5 действий. Пример: убираем все из первой коробки, а потом перекладываем из второй в первую 5 шаров.

1.2. У Оли в черном ящике лежит 5 яблок и 7 груш, а в белом ящике — 12 груш. За одно действие Оля может не глядя достать фрукт из любого ящика и либо съесть его, либо переложить в другой ящик. Оля хочет, чтобы в ящиках было одинаковое содержимое. За какое минимальное количество действий Оля сможет гарантированно это сделать? Ящики закрыты, определить фрукты на ощупь нельзя.

Ответ: 18

Решение. Допустим, что в обоих ящиках в итоге остались и яблоки, и груши. Тогда последним действием Оля достала какой-то фрукт из ящика, а там остались и яблоки, и груши. В силу этого она не могла гарантированно достать нужный фрукт, так как ей мог попасться не тот. Значит, в конце в каждом ящике должен остаться только один фрукт, а другой надо убрать.

Если убирать груши, то потребуется минимум 19 действий, а если яблоки — минимум 12 действий, так как яблоки могут быть на дне коробки. При этом останется от 12 до 18 груш в белом ящике, и чтобы их разложить, потребуется еще минимум 6 действий. Пример: убираем все из черного ящика, а потом перекладываем из белого в черный 6 груш.

1.3. У Инны есть две закрытых коробки — квадратная и круглая. Ей сообщили, что в круглой лежат 3 белых и 10 черных шаров, а в квадратной — 8 черных. За одно действие Инна, не глядя, может достать шар из любой коробки и либо его выбросить, либо переложить в другую коробку. Инна хочет сделать так, чтобы в коробках было одинаковое содержимое. За какое минимальное количество действий Инна сможет гарантированно это сделать?

Ответ: 17

Решение. Допустим, что в обеих коробках в итоге остались и белые, и черные шары. Тогда последним действием Инна достала шар определенного цвета из какой-то коробки, а там остались и черные, и белые. Но она не могла этого сделать гарантированно, т.е. ей постоянно мог попадаться шар не того цвета. Следовательно, в конце останутся шары одного цвета, а другой цвет нужно убрать.

Если убирать черные шары, то потребуется минимум 18 действий, а если белые — минимум 13 действий, так как белые могут попасться только на дне первой коробки. При этом останется от 8 до 28 черных шаров во второй коробке, и, чтобы их разделить, потребуется

еще минимум 4 действия. Пример: убираем все из первой коробки, а потом перекладываем из второй в первую 4 шара.

1.4. У Жени в черном ящике лежит 8 бананов и 10 манго, а в белом ящике — 12 манго. За одно действие Женя, не глядя, может достать фрукт из любого ящика, и либо съесть его, либо переложить в другой ящик. Женя хочет, чтобы в ящиках было одинаковое содержимое. За какое минимальное количество действий Женя сможет гарантированно это сделать? Ящики закрыты, определить фрукты на ощупь нельзя.

Ответ: 24

Решение. Допустим, что в итоге в обоих ящиках остались и бананы, и манго. Тогда последним действием Женя достала какой-то фрукт из ящика, а там остались и те, и другие. В силу этого она не могла гарантированно достать нужный фрукт, так как ей мог попасться не тот.

Если убирать манго, то потребуется минимум 22 действия, а если бананы — минимум 18 действий, так как бананы могут попасться на дне ящика. При этом останется от 12 до 22 манго в белом ящике, и чтобы их разложить, понадобится еще минимум 6 действий. Пример: убираем все из черного ящика, а потом перекладываем из белого в черный 6 манго.

Задание №2

2.1. В начале января 2020 года Боря и Витя начали копить деньги на новый телефон. Каждый месяц 2020 числа Боря откладывал по 200 рублей, а Витя — по 300 рублей. Однажды Боре надоело копить деньги, и он перестал откладывать (но уже скопленные деньги тратить не стал). Витя продолжал копить. 11 мая 2021 года Витины сбережения стали в 6 раз больше, чем Борины. В каком месяце Боря перестал копить? Укажите месяц и год.

Ответ: май, 2020

Решение. К 1 мая 2021 года Витя будет откладывать $12 + 4 = 16$ месяцев, тогда он накопит $16 \cdot 300 = 4800$ рублей. Если в этот момент у него накоплений в 6 раз больше чем у Бори, то Боря накопит $4800 : 6 = 800$ рублей. Такую сумму он отложит за $800 : 200 = 4$ месяца, тогда в апреле он еще будет откладывать деньги, а в мае перестанет.

2.2. В начале января 2019 года Боря и Витя начали копить деньги на новый телефон. Каждый месяц 2020 числа Боря откладывал по 150 рублей, а Витя — по 100 рублей. Однажды Вите надоело копить деньги, и он перестал откладывать (но уже скопленные деньги тратить не стал). Боря продолжал копить. 11 мая 2021 года сбережения Бори стали в 7 раз больше, чем у Вити. В каком месяце Витя перестал копить? Укажите месяц и год.

Ответ: июль, 2019

Решение. К маю 2021 года Боря будет копить уже 28 месяцев, то есть отложит $28 \cdot 150 = 4200$ руб. Значит, Витя накопил $4200 : 7 = 600$ руб., то есть копил всего 6 месяцев. Это значит, что в июне он еще откладывал деньги, а в июле уже нет.

2.3. 11 января 2011 года Баба Яга и Кощей Бессмертный решили посоревноваться в том, кто из них добрее. Каждый месяц Баба Яга делала добро 77 детям, а Кощей Бессмертный — 12. Но однажды Кощею надоело быть добрым. 11 января 2021 года Баба Яга подсчитала, что количество ее добрых дел стало в 5 раз больше, чем у Кощея (и тоже прекратила этим заниматься). В какой месяц Кощей перестал творить добро? Укажите месяц и год.

Ответ: март, 2012

Решение. Баба Яга делала добро 10 лет, итого 120 месяцев. Значит, Баба Яга сделала $7 \cdot 120 = 840$ добрых дел, а Кощей $840 : 5 = 168$ дел. $168 : 12 = 14$, поэтому Кощей 14 месяцев казался добрым, а перестал таким быть на пятнадцатый месяц.

2.4. В начале января 2018 года мать и отец стали копить на новую квартиру. Зарплата им поступала 15 числа каждого месяца, и после каждой зарплаты мать откладывала 12 тыс. рублей, а отец — 22 тыс. рублей. Однажды доходы у отца упали, и семья решила всю его зарплату тратить, а откладывать только с зарплаты матери. 11 октября 2020 года оказалось, что накопления матери в два раза больше, чем накопления отца. С какого месяца и года зарплата отца идет на текущие расходы семьи? Укажите месяц и год.

Ответ: октябрь, 2018

Решение. К октябрю 2020 года прошел полностью 2018 и 2019 годы, и еще 9 месяцев от 2020 года, всего — 33 месяца. Накопления с зарплаты матери составили $33 \cdot 12 = 396$ тыс. рублей. Значит, папины составили $(396:2):22 = 9$ мес. Значит, понижение дохода случилось через 9 месяцев, то есть в октябре 2018 г.

Задание №3

3.1. Шоколадный батончик весил 250 г и стоил 50 рублей. Недавно, в целях экономии, производитель уменьшил вес батончика до 200 г, а его стоимость повысил до 52 рублей. На сколько процентов увеличился доход производителя?

Ответ: 30

Решение. Будем считать, на сколько процентов повысилась стоимость одного килограмма. До повышения 1 кг стоил 200 рублей, а после повышения — $52 \cdot 5 = 260$ рублей. Повышение составляет 60 рублей на 1 кг, который стоил 200 рублей. Это $\frac{60}{200} \cdot 100\% = 30\%$

3.2. Шоколадный батончик весил 400 г и стоил 150 рублей. Недавно, в целях экономии, производитель уменьшил вес батончика до 300 г, а его стоимость повысил до 180 рублей. На сколько процентов увеличился доход производителя?

Ответ: 60

Решение. Будем считать, на сколько процентов повысилась стоимость 1 кг 200 г. До повышения это количество стоило 450 рублей, а после повышения — $180 \cdot 4 = 720$ рублей. Повышение составляет 270 рублей на 1.2 кг, который стоил 450 рублей. Это $\frac{270}{450} \cdot 100\% = 60\%$

3.3. Пакет молока объемом 1 л стоил 80 рублей. Недавно, в целях экономии, производитель уменьшил объем пакета до 0.9 л, а цену повысил до 99 рублей. На сколько процентов увеличился доход производителя?

Ответ: 37.5

Решение. Будем считать, на сколько процентов повысилась стоимость 9 л молока. До повышения 9 л стоили $9 \cdot 80 = 720$ рублей, а после повышения — $99 \cdot 10 = 990$ рублей. Повышение составляет 270 рублей на 9 литров. Это количество раньше стоило 720 рублей. Это $\frac{270}{720} \cdot 100\% = 37.5\%$

3.4. Пакет молока объемом 1 л стоил 60 рублей. Недавно, в целях экономии, производитель уменьшил объем пакета до 0.9 л, а его цену повысил до 81 рубля. На сколько процентов увеличился доход производителя?

Ответ: 50

Решение. Будем считать, на сколько процентов повысилась стоимость 9 л молока. До повышения 9 л стоили $9 \cdot 60 = 540$ рублей, а после повышения — $81 \cdot 10 = 810$ рублей. Повышение составляет 270 рублей на 9 литров. Это количество раньше стоило 540 рублей.

Это $\frac{270}{540} \cdot 100\% = 50\%$

Задание №4

4.1. Галя задумала число, умножила его на N , потом прибавила к результату N , разделила получившееся число на N и вычла N . В итоге она получила число, которое на 2021 меньше, чем изначально задуманное. Чему равно N ?

Ответ: 2022

Решение. Пусть она задумала число k , тогда после двух операций у неё будет число $kN + N$, а после деления будет число $k + 1$, то есть число, на 1 больше задуманного. И когда она вычтет N , получится число, то получится число, которое на $N - 1$ меньше изначального.

4.2. Галя задумала число, умножила его на N , потом прибавила к результату N , разделила получившееся число на N и вычла N . В итоге она получила число, которое на 7729 меньше, чем изначально задуманное. Чему равно N ?

Ответ: 7730

Решение. Пусть она задумала число k , тогда после двух операций у неё будет число $kN + N$, а после деления будет число $k + 1$, то есть число, на 1 больше задуманного. И когда она вычтет N , получится число, то получится число, которое на $N - 1$ меньше изначального.

4.3. Галя задумала число, умножила его на N , потом прибавила к результату N , разделила получившееся число на N и вычла N . В итоге она получила число, которое на 100 меньше, чем изначально задуманное. Чему равно N ?

Ответ: 101

Решение. Пусть она задумала число k , тогда после двух операций у неё будет число $kN + N$, а после деления будет число $k + 1$, то есть число, на 1 больше задуманного. И когда она вычтет N , получится число, то получится число, которое на $N - 1$ меньше изначального.

Задание №5

5.1. На празднование Дня именинника в параллели 5 классов было заказано несколько пицц. На всех мальчиков было заказано 14 пицц, при этом всем мальчикам досталось поровну. Каждой девочке тоже досталось поровну, но в два раза меньше, чем мальчику. Сколько пицц было заказано, если известно, что девочек в этой параллели 13, а мальчиков больше, чем девочек? Пиццы можно делить на части.

Ответ: 15

Решение. Пусть мальчиков m , а количество пицц, доставшихся девочкам — x . Если бы каждый мальчик съел бы столько же, сколько и девочка, то мальчики съели бы 7 пицц. Тогда $m : 13 = 7 : x$, откуда $mx = 91$. У числа 91 есть только один делитель, больший 13, это 91. Поэтому $m = 91$, $x = 1$, ответ $14 + 1 = 15$ пицц (увы, на 13 девочек была заказана только одна пицца, но это по их желанию).

5.2. На празднование Дня именинника в параллели 5 классов было заказано несколько пицц. На всех мальчиков было заказано 10 пицц, при этом всем мальчикам досталось поровну. Каждой девочке тоже досталось поровну, но в два раза меньше, чем мальчику. Сколько пицц было заказано, если известно, что девочек в этой параллели 11, а мальчиков больше, чем девочек? Пиццы можно делить на части.

Ответ: 11

Решение. Пусть мальчиков m , а количество пицц, доставшихся девочкам — x . Если бы каждый мальчик съел бы столько же, сколько и девочка, то мальчики съели бы 5 пицц. Тогда $m : 11 = 5 : x$, откуда $mx = 55$. У числа 55 есть только один делитель, больший 11, это 55. Поэтому $m = 55$, $x = 1$, ответ $10 + 1 = 11$ пицц (увы, на 11 девочек была заказана только одна пицца, но это по их желанию).

5.3. На празднование Дня именинника в параллели 5 классов было заказано несколько пицц. На всех мальчиков было заказано 22 пиццы, при этом всем мальчикам досталось поровну. Каждой девочке тоже досталось поровну, но в два раза меньше, чем мальчику. Сколько пицц было заказано, если известно, что девочек в этой параллели 13, а мальчиков больше, чем девочек? Пиццы можно делить на части.

Ответ: 23

Решение. Пусть мальчиков m , а количество пицц, доставшихся девочкам — x . Если бы каждый мальчик съел бы столько же, сколько и девочка, то мальчики съели бы 11 пицц. Тогда $m : 13 = 11 : x$, откуда $mx = 143$. У числа 143 есть только один делитель, больший 13, это 143. Поэтому $m = 143$, $x = 1$, ответ $22 + 1 = 23$ пицц (увы, на 13 девочек была заказана только одна пицца, но это по их желанию).

5.4. На празднование Дня именинника в параллели 5 классов было заказано несколько пицц. На всех мальчиков было заказано 10 пицц, при этом всем мальчикам досталось поровну. Каждой девочке тоже досталось поровну, но в два раза меньше, чем мальчику. Сколько пицц было заказано, если известно, что девочек в этой параллели 17, а мальчиков больше, чем девочек? Пиццы можно делить на части.

Ответ: 11

Решение. Пусть мальчиков m , а количество пицц, доставшихся девочкам — x . Если бы каждый мальчик съел бы столько же, сколько и девочка, то мальчики съели бы 5 пицц. Тогда $m : 17 = 5 : x$, откуда $mx = 85$. У числа 85 есть только один делитель, больший 17, это 85. Поэтому $m = 85$, $x = 1$, ответ $10 + 1 = 11$ пицц.

Задание №6

6.1. Сколько существует таких натуральных N , больших 900, что среди чисел $3N$, $N - 900$, $N + 15$, $2N$ ровно два четырехзначных?

Ответ: 5069

Решение. Заметим, что $2N > N + 15$, и если записать числа в порядке возрастания, получим $N - 900$, $N + 15$, $2N$, $3N$. Четырехзначными могут быть только два подряд идущих. Если четырехзначные — это $N - 900$ и $N + 15$, то $2N$ должно быть пятизначным, т.е. $N \geq 5000$. При этом N меньше 9985 (чтобы $N + 15$ было четырехзначным), т.е. N — от 5000 до 9984, 4985 вариантов. Если $N + 15$, $2N$ — четырехзначные, то $N - 900$ — трехзначное, $N \leq 999 + 900 = 1899$, но тогда $3N$ не может оказаться пятизначным. Если числа $2N$ и $3N$ — четырехзначные, то $N \geq 500$, но по условию $N > 900$. При этом $N + 15$ должно быть трехзначным, откуда $N \leq 984$, то есть N принимает значения от 901 до 984, еще 84 варианта. Итого $4985 + 84 = 5069$ вариантов.

6.2. Сколько существует таких натуральных N , больших 300, что среди чисел $4N$, $N - 300$, $N + 45$, $2N$ ровно два четырехзначных?

Ответ: 5410

Решение. Заметим, что $2N > N + 45$, и если записать числа в порядке возрастания, получим $N - 300$, $N + 45$, $2N$, $4N$. Четырехзначными могут быть только два подряд идущих. Если четырехзначные — это $N - 300$ и $N + 45$, то $2N$ должно быть пятизначным, т.е. $N \geq 5000$. При этом N меньше 9955 (чтобы $N + 45$ было четырехзначным), т.е. N — от 5000 до 9954, 4955 вариантов. Если $N + 45$, $2N$ — четырехзначные, то $N - 300$ — трехзначное, $N \leq 999 + 300 = 1399$, но тогда $4N$ не может оказаться пятизначным. Если числа $2N$ и $4N$ — четырехзначные, то $N \geq 500$. При этом $N + 45$ должно быть трехзначным, откуда $N \leq 954$, то есть N принимает значения от 500 до 954, еще 455 вариантов. Итого $4955 + 455 = 5410$ вариантов.

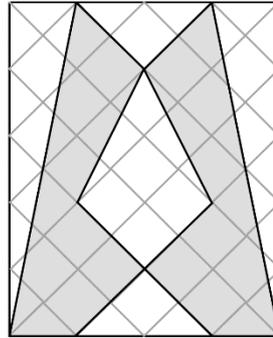
6.3. Сколько существует таких натуральных N , больших 700, что среди чисел $3N$, $N - 700$, $N + 35$, $2N$ ровно два четырехзначных?

Ответ: 5229

Решение. Заметим, что $2N > N + 35$, и если записать числа в порядке возрастания, получим $N - 700, N + 35, 2N, 3N$. Четырехзначными могут быть только два подряд идущих. Если четырехзначные — это $N - 700$ и $N + 35$, то $2N$ должно быть пятизначным, т.е. $N \geq 5000$. При этом N меньше 9965 (чтобы $N + 35$ было четырехзначным), т.е. N — от 5000 до 9964, 4965 вариантов. Если $N + 35, 2N$ — четырехзначные, то $N - 700$ — трехзначное, $N \leq 999 + 700 = 1699$, но тогда $3N$ не может оказаться пятизначным. Если числа $2N$ и $3N$ — четырехзначные, то $N \geq 500$, но по условию $N > 700$. При этом $N + 35$ должно быть трехзначным, откуда $N \leq 964$, то есть N принимает значения от 701 до 964, еще 264 варианта. Итого $4965 + 264 = 5229$ вариантов.

Задание №7

7.1 Из бумаги вырезали прямоугольник $55 \text{ см} \times 44 \text{ см}$, после чего расчертили его линиями под 45° и закрасили область серым, как показано на рисунке. Найдите площадь серой области.

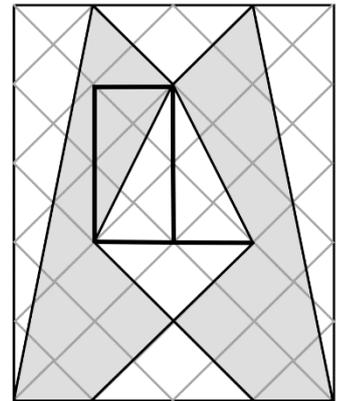


Ответ: 10

Решение. Площадь всего листка равна 20 см^2 . Заметим, что диагональ новых квадратиков равна 1 см. Сумма площадей угловых белых треугольников равна 5 см^2 , так как вместе они составят прямоугольник $5 \text{ см} \times 1 \text{ см}$.

Далее рассмотрим три одинаковых белых треугольника — верхний, средний и нижний. Если их разрезать пополам (как нижний), и половинки переставить, то получится квадрат 1×1 , поэтому все три треугольника в сумме составят 3 см^2 .

Переставим оставшиеся белые треугольники так, как показано на рисунке, тогда вместе они составят прямоугольник размером 2×1 , и сумма их площадей будет равна 2 см^2 . Итого белая площадь равна $5 + 3 + 2 = 10 \text{ см}^2$, и серая площадь тоже равна 10 см^2 .



Задание №8

8.1. В кинотеатре пять подруг заняли места с 1 по 5 (самое левое место — номер 1). Во время фильма Аня ушла за попкорном. Когда она вернулась, то обнаружила, что Варя переместилась на два места вправо, Галя переместилась на одно место влево, а Диана и Эля поменялись местами, оставив крайнее место для Ани. На каком месте сидела Аня до того, как встала?

Ответ: 2

Решение. Давайте посмотрим, как изменился номер места у всех, кроме Ани. У Вари он вырос на 2, у Гали уменьшился на 1, а у Дианы и Эли в сумме не изменился. При этом общая сумма мест не изменилась, то есть номер места Ани должен уменьшиться на 1. Но тогда оставленное для неё место не может быть местом 5 (так как места 6 нет), а значит для неё оставили место 1, и изначально у неё было место 2.

8.2. В кинотеатре пять подруг заняли места с 1 по 5 (самое левое место — номер 1). Во время фильма Аня ушла за попкорном. Когда она вернулась, то обнаружила, что Варя переместилась на три места вправо, Галя переместилась на одно место влево, а Диана и Эля поменялись местами, оставив крайнее место для Ани. На каком месте сидела Аня до того, как встала?

Ответ: 3

Решение. Давайте посмотрим, как изменился номер места у всех, кроме Ани. У Вари он вырос на 3, у Гали уменьшился на 1, а у Дианы и Эли в сумме не изменился. При этом общая сумма мест не изменилась, то есть номер места Ани должен уменьшиться на 2. Но тогда оставленное для неё место не может быть местом 5 (так как места 6 нет), а значит для неё оставили место 1, и изначально у неё было место 3.

8.3. В кинотеатре пять подруг заняли места с 1 по 5 (самое левое место — номер 1). Во время фильма Аня ушла за попкорном. Когда она вернулась, то обнаружила, что Варя переместилась на одно место вправо, Галя переместилась на три места влево, а Диана и Эля поменялись местами, оставив крайнее место для Ани. На каком месте сидела Аня до того, как встала?

Ответ: 3

Решение. Давайте посмотрим, как изменился номер места у всех, кроме Ани. У Вари он вырос на 1, у Гали уменьшился на 3, а у Дианы и Эли в сумме не изменился. При этом общая

сумма мест не изменилась, то есть номер места Ани должен увеличиться на 2. Но тогда оставленное для неё место не может быть местом 1 (так как места 0 и тем более -1 нет), а значит для неё оставили место 5, и изначально у неё было место 3.

8.4. В кинотеатре пять подруг заняли места с 1 по 5 (самое левое место — номер 1). Во время фильма Аня ушла за попкорном. Когда она вернулась, то обнаружила, что Варя переместилась на одно место вправо, Галя переместилась на два места влево, а Диана и Эля поменялись местами, оставив крайнее место для Ани. На каком месте сидела Аня до того, как встала?

Ответ: 4

Решение. Давайте посмотрим, как изменился номер места у всех, кроме Ани. У Вари он вырос на 1, у Гали уменьшился на 2, а у Дианы и Эли в сумме не изменился. При этом общая сумма мест не изменилась, то есть номер места Ани должен увеличиться на 1. Но тогда оставленное для неё место не может быть местом 1 (так как места 0 нет), а значит для неё оставили место 5, и изначально у неё было место 4.