

9 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа..

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

9.1. Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y – натуральные числа.

Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ – квадрат целого числа.

9.2. На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

9.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $y > 1$.

9.4. В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 3×3 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

9.5. На данной окружности ω выбрана фиксированная точка A . Выберем на окружности две произвольные точки B и C , и найдем точку D пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью ω . Пусть K – такая точка, что точка D – середина отрезка AK . Прямая KC вторично пересекает окружность в точке P ($P \neq C$). Докажите, что точка P не зависит от выбора точек B и C .