ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители: Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10 класс

10.1. Чему равна сумма цифр числа $A = 100^{40} - 100^{30} + 100^{20} - 100^{10} + 1$?

Ответ. 361.

Решение. Число равно сумме трех чисел: числа, составленного из 20 девяток, после которых следуют 60 нулей, числа из 20 девяток, после которых следуют 20 нулей, наконец, числа 1. Все девятки и единица приходятся на нули в других слагаемых, поэтому переноса разрядов не происходит, и ответ равен $180 + 180 + 1 = 361$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

10.2. Множество M состоит из произведений пар последовательных натуральных чисел: $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, ... Докажите, что сумма некоторых двух элементов множества M равна 2^{2021}.

Решение. Рассмотрим сумму двух последовательных произведений: $S = (n-1)n + n(n+1) = 2n^2$. Значит, если $n^2 = 2^{2020}$ ($n = 2^{1010}$), то $S = 2^{2021}$.

10.3. Даны три квадратных трехчлена $f(x) = ax^2+bx+c$, $g(x) = bx^2+cx+a$, $h(x) = cx^2+ax+b$, где a, b, c – различные ненулевые действительные числа. Из них составили три уравнения $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$. Найдите произведение всех корней этих трех уравнений, если известно, что каждое из них имеет по два различных корня.

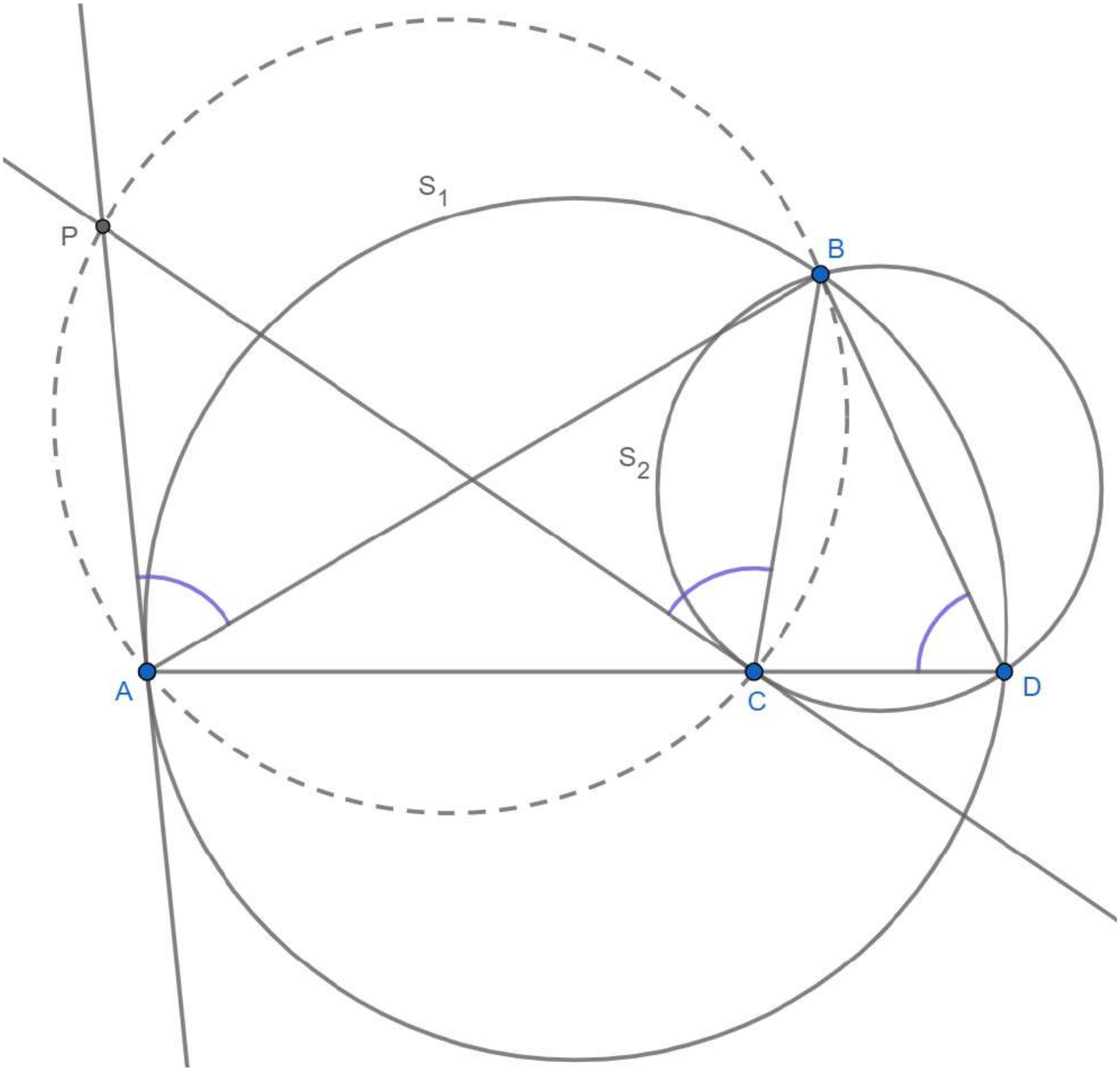
Ответ. 1.

Решение. Так как известно, что все уравнения имеют корни, то можно воспользоваться теоремой Виета. Тогда произведение всех корней будет равно $\frac{c-a}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c-a} = 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

10.4. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C выбрана точка D. Пусть S_1 – окружность, описанная около треугольника ABD, S_2 – окружность, описанная около треугольника CBD. Касательная к окружности S_1, проходящая через точку A, и касательная к окружности S_2, проходящая через точку C, пересекаются в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. По свойству угла между касательной и хордой, угол BAP равен углу BDA. Аналогично, угол BCP равен углу BDC, равному углу BDA. Значит, углы BAP и BCP, опирающиеся на отрезок BP, равны. Но это означает, что четырехугольник $APBC$ можно вписать в окружность. То есть точка P лежит на окружности, проходящей через вершины треугольника ABC. Утверждение доказано.



10.5. Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). И этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков). Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?

Ответ. Не могло.

Решение. Рассмотрим раскраску отрезков в два цвета: все вертикальные покрасим белым, а все горизонтальные – черным. Тогда в каждом уголке будет ровно по одному белому и одному черному отрезку, а в отрезке длины 2 – два одноцветных отрезка. Заметим, что всего покрашено $10 \cdot 11 = 110$ белых и 110 черных отрезков (всего 220 отрезков длины 1, то есть покрашено 110 фигур). Но 110 – четное число, поэтому уголков будет четное количество. А тогда и отрезков длины 2 также будет четное количество.