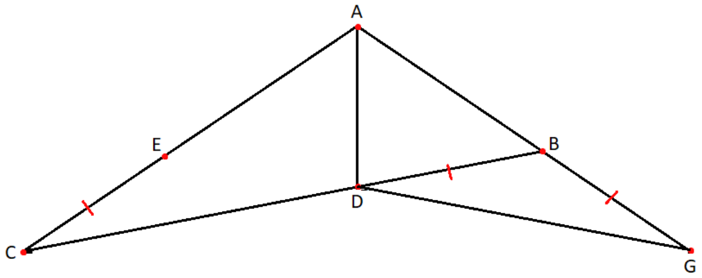
10 класс

1. **Ответ: $\pm\sqrt{3}$.** Заметим, что $a^2 + 2ab + b^2 = 6ab$ и $a^2 - 2ab + b^2 = 2ab$. Тогда $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = \pm\sqrt{3}$.
   Критерии: потерян отрицательный корень – не больше 5 баллов.

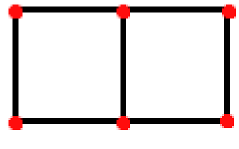


2. Продолжим сторону AB треугольника за точку B и отметим на этом продолжении точку G такую, что BG=BD=CE. Тогда треугольник DBG – равнобедренный (по построению). Т.к. ∠ABC=40, то ∠BGD=∠BDG=20. Заметим, что ∠ACB=20. Тогда треугольники ACD и AGD равны (AD – общая, ∠CAD=∠GAD=60 (AD – биссектриса), ∠AGD=∠ACD=20, а значит равны и третьи углы ∠ADC=∠ADG). Тогда AC=AG, а учитывая BG=CE, получим AE=AB, то есть треугольник BAE – равнобедренный. AD – биссектриса, а значит и высота, получается AD ⊥ BE.

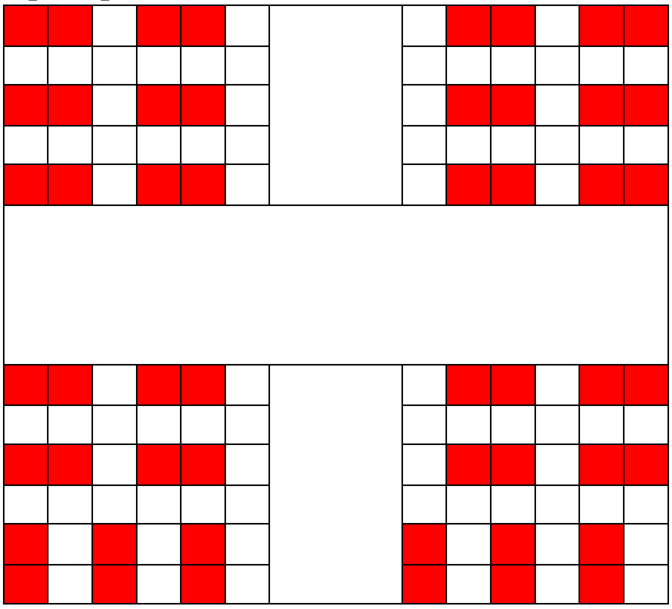
3. У параболы $y = f(x)$ имеется вертикальная ось симметрии $x = c$, где c равно среднему арифметическому корней любого квадратного уравнения $f(x) = const$. Судя по расположению корней, $c \in [2, 3]$ (наименьшее возможное значение c достигается для корней 0 и 4, наибольшее — для 1 и 5). Если бы выполнялось неравенство $f(8) < 5$, то один из корней уравнения $f(x) = 5$ лежал бы в отрезке $[-2, -1]$ (это соответствует пересечению параболы с отрезком EF), а другой оказался бы больше 8. Тогда среднее арифметическое корней оказалось бы больше 3. Противоречие.

4. Возведем равенство в квадрат $xy = 1 - x - y$. Тогда получим
$$x^2y^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy$$
Подставим в левую часть вместо x^2y^2 полученное выражение. Получим, что теперь нужно доказать верность следующего неравенства
$$1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + x + y \geq 5xy,$$
или после преобразований получим
$$x^2 + y^2 - 3xy + 1 - x - y \geq 0.$$
Далее, воспользуемся еще раз равенством $xy = 1 - x - y$ и получим неравенство
$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0,$$
котрое справедливо при всех x и y.

5. **Ответ: n = 110. Оценка:** Подсчет удобнее проводить по узлам клеток. Например, в доминошке 1 × 2 таких узлов шесть (на рисунке отмечены красными точками). А на доске n × n таких узлов (n+1) × (n+1). Т.к. плитки не имеют общих точек, то узлы у каждой плитки будут только свои. Тогда чтобы разместить 2021 плитки на доске понадобится хотя бы 2021·6=12126 узлов. Решая неравенство 12126 ≤ (n+1) × (n+1), получим, что n+1 ≥ 111 или n ≥ 110.



Пример: Покажем, что на доске 110×110 можно уместить 2021 доминошек.



Таким образом на доске уместится $37 \times 54 + 55 = 2053$.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 3 балла.