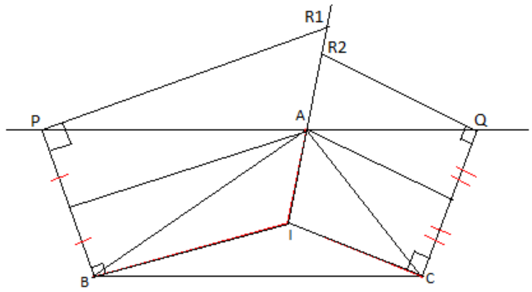
11 класс

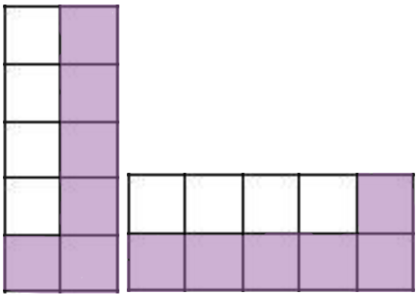
1. **Ответ: $\pm\sqrt{3}$.** Заметим, что $a^2 + 2ab + b^2 = 6ab$ и $a^2 - 2ab + b^2 = 2ab$. Тогда $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = \pm\sqrt{3}$.
   Критерии: потерян отрицательный корень – не больше 5 баллов.
2. **Ответ: 4042.** Заметим, что $x^2 = ([x] + \{x\})^2 = [x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2 = [x]^2 + 4042 + \{x\}^2$. Очевидно, что $0 < \{x\}^2 < 1$. То есть
   $$[x^2] = [[x]^2 + 4042 + \{x\}^2] = [x]^2 + 4042$$
   Откуда находим искомый ответ $[x^2] - [x]^2 = 4042$.
3. Например, такой является точка (1; 2022). Действительно, для все таких квадратичных уравнений при $x = 1$ получим $y = 1^2 + p + q = 1 + 2021 = 2022$. То есть все такие параболы проходят через точку (1; 2022) (на самом деле, такая точка единственна).
4. Заметим, что биссектрисы и соответствующие внешние биссектрисы треугольника будут перпендикулярны. То есть PB⊥BI и QC⊥CI. Продолжим биссектрису AI за вершину A и докажем, что точка R находится на этой прямой. Пусть перпендикуляр к PB в точке P и AI пересекаются в точке R_1, а перпендикуляр к QC в точке Q и прямая AI – в точке R_2.



   Т.к. PQ ∥ BC, то ∠ABC=∠PAB=2α, ∠ACB=∠QAC=2β. Тогда ∠PBA = 90 – ∠ABI = 90 – α = ∠APB. То есть треугольник APB – равнобедренный. Аналогично треугольник AQC – равнобедренный. Далее рассмотрим прямоугольную трапецию $IBPR_1$. В нем серединный перпендикуляр стороны PB проходит через точку A (треугольник APB – равнобедренный). Тогда по теореме Фалеса $AI=AR_1$. Аналогично для прямоугольной трапеции $ICQR_2$ получим $AI=AR_2$. Отсюда $AR_1= AI=AR_2$ на одной и той же прямой AI. Получается точки R_1 и R_2 совпадают. Но тогда получается эта совпадающая точка и есть точка пересечения перпендикуляров PR и QR. А для нее мы ранее доказали, что AI=AR. Чтд.

5. Допустим, Вадим как-то расставил прямоугольники. Докрасим каждый прямоугольник, как на рисунке. Заметим, что получившиеся прямоугольники 2x5 тоже не пересекаются, но могут касаться друг друга. Прямоугольник 2x5 выходит из квадрата, если прямоугольник 1x4 касается правой или нижней стороны квадрата, но не больше чем на одну клетку.

   Оценка: Получается в квадрате $n \times n$ помещается не больше чем $\frac{(n+1)\times(n+1)}{10}$ прямоугольников 1x4. Тогда n такой, что $\frac{(n+1)\times(n+1)}{10} \geq 2021$. Получим, n не меньше 143.



Пример. Расставим в квадрат 143x143 прямоугольники 2x5. Поделим квадрат на три части 138x135, 8x135, 5x134 и останется маленький кусок. В 138x135 помещается 69*27, 8x135 помещается 27*4, 5x134 помещается 1*67. Что равняется 2038.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 3 балла.