7 класс

1. Дима написал в тетради последовательность нулей и единиц. Затем он заметил, что единица идёт после нуля 16 раз, семь раз 1 идёт после 01 и восемь раз 0 идёт после 01. Какими могут быть последние две цифры на доске?(В ответе укажите все варианты и докажите, что других нет).

Ответ. 01.

Решение. Сочетание 01 встречается в тетради 16 раз. После него $7 + 8 = 15$ раз есть 0 или 1, а один раз нет. Следовательно, одно из сочетаний 01 стоит в конце строки.

Критерии. Полное решение – 7б. Частные примеры последовательностей с верным ответом – 1б. Только ответ – 0б.

2. На белом листе есть числа: 1 и 2. Разрешено следующее действие: можно увеличить одно из чисел на листе на сумму цифр другого. Можно ли с помощью такого действия числа 1 и 2 превратить в:

а) 2021 и 2021?

б) 2022 и 2022?

Ответ. а) да; б) нет.

Решение. а) Сделаем из числа 2 прибавлением 1 число 2021 (2020 раз прибавим к двойке единицу). Заметим, что сумма цифр числа 2021 равна 2+0+2+1=5, следовательно, прибавив к единице 404 раза 5 получим два числа 2021 и 2021.

б) У числа 2022 сумма цифр кратна 3 ($2 + 0 + 2 + 2 = 6$). Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Для того чтобы получить 2022 и 2022 нужно сделать оба числа кратными 3, что невозможно. Рассмотрим последний шаг: получилось два числа кратных 3, следовательно, на предыдущем шаге были числа так же кратные 3, значит, спускаясь так к началу действий – исходные числа должны быть кратны 3, но это не так, у нас числа 1 и 2.

Критерии. Полное решение – 7б. Алгоритмы получения 2021 и 2021 могут быть различные, необходимо проверять. Решение пункта а) – 2б, пункта б) – 5б. Только ответ – 0б.

3. На телефоне установлено 21 различное приложение. Сколькими способами можно выбрать шесть приложений на удаление так, чтобы среди них было три приложения из следующих шести $TVFT'V'F'$, но не было ни одной из пар TT', VV', FF'?

Ответ. $8 \cdot C_{15}^3 = 3640$.

Решение. Выберем по одному приложению из каждой пары TT', VV', FF' – 8 способов. Таким образом из 21 приложения уже откинуто 6, осталось 15. Выберем 3 приложения из оставшихся 15, это можно сделать $\frac{15\cdot14\cdot13}{3!}$ (или C_{15}^3) способами. Всего $8 \cdot C_{15}^3 = 3640$.

Критерии. Полное решение – 7б. Идея выбрать по одному приложению из пары без дальнейших продвижений – 1б.

4. По кругу написаны m чисел таким образом, что каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовём число *сильным*, если оба его соседа меньше него и *слабым*, если оба его соседа больше него. Обозначим сумму всех сильных чисел S, а сумму слабых чисел s. Докажите, что $m = 2(S - s)$.

Решение. Выпишем m пар соседних чисел и в каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Сложим эти разности. С одной стороны, эта сумма равна m, так как каждая разность равна 1. С другой стороны, каждое *сильное* число войдёт в две разности со знаками $''+''$, каждое *слабое* – оба раза со знаками $''-''$, а все остальные с разными знаками. Значит, $m = 2S - 2s$.

Критерии. Полное решение – 7б. Частные случаи с конкретными числами – 0б.

5. Катя выписала в тетрадь множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и решила разбить его на два подмножества. Докажите, что как бы Катя не разбивала множество на два подмножества всегда хотя бы одно из полученных подмножеств содержит три таких числа, что сумма двух из них равна удвоенному третьему.

Решение. Строить решение будет отталкиваясь от 5, так как пары числе (1,9), (2,8), (3,7), (4,6) в сумме дают удвоенную пятерку. Далее будет перебор вариантов, но для того чтобы его упростить заметим следующее свойство: подряд идущие числа с одинаковым шагом сразу удовлетворяют условию задачи (из свойств арифметических прогрессий), например, (1,2,3) или (2,5,8). Рассмотрим 5 вариантов, исчерпывающих возможные ситуации. Обозначим для удобства одно множество A, другое B:

1. -) Пусть 5 в множестве A, а 9 в B, то есть $A = \{5\}, B = \{9\}$.

-) Положим 1 в A. В силу свойства выше 3 не может быть в A, так как иначе образуется тройка (1,3,5), следовательно, 3 в B, то есть $A = \{5, 1\}, B = \{9, 3\}$.

-) Число 6 не может быть в B, так как образуется тройка (3,6,9), значит 6 в A, но тогда 4 в B, иначе образуется (4,5,6), то есть $A = \{5, 1, 6\}, B = \{9, 3, 4\}$.

-) 7 не может быть в A, так как (5,6,7), следовательно, 7 в B, но тогда 8 в A, так как в B иначе будет (7,8,9), то есть $A = \{5, 1, 6, 8\}, B = \{9, 3, 4, 7\}$.

Осталась 2, но её нельзя добавить ни в A, ни в B, в A нельзя, так как появится пара (2,8), в B нельзя, так как появится (2,3,4).

2. -) Пусть 5 и 9 в множестве A, а 1 в B, то есть $A = \{5, 9\}, B = \{1\}$.

-) 7 не может в A, иначе (5,7,9), значит 7 в B, то есть $A = \{5, 9\}, B = \{1, 7\}$.

-) 4 в A, иначе (1,4,7), но тогда 3 в B, так как образуется (3,4,5), то есть $A = \{5, 9, 4\}, B = \{1, 7, 3\}$.

-) 6 в B, иначе (4,5,6), а 8 в A, иначе (6,7,8), то есть $A = \{5, 9, 4, 8\}, B = \{1, 7, 3, 6\}$.

Осталась 2, но её нельзя добавить ни в A, ни в B, в A нельзя, так как появится пара (2,8), в B нельзя, так как появится (1,2,3).

3. -) Пусть 5 в множестве A, а 9 и 1 в B, то есть $A = \{5\}, B = \{1, 9\}$.

-) 3 и 7 одновременно не могут быть в A, положим туда 3, а 7 в B, то есть $A = \{5, 3\}, B = \{1, 9, 7\}$.

-) 4 в B, иначе (3,4,5), то есть $A = \{5, 3\}, B = \{1, 9, 7, 4\}$, но тут уже противоречие в множестве B тройка (1,4,7).

4. В пункте 3. на втором шаге мы к 5 положили 3, теперь положим 7 и соответственно 3 в B, то есть $A = \{5, 7\}, B = \{1, 9, 3\}$.

-) 6 в B, иначе (5,6,7), то есть $A = \{5, 7\}, B = \{1, 9, 3, 6\}$, но тогда возникает тройка (3,6,9).

5. В пунктах 3. и 4. мы 3 или 7 положили с 5, теперь 3 и 7 положим в B, то есть $A = \{5\}, B = \{1, 9, 7, 3\}$.

-) 2 и 8 не могут быть в B, иначе будут тройки (1,2,3) и (7,8,9) соответственно, но тогда в A возникает тройка (2,5,8) – противоречие.

Критерии. Полное решение – 7б. Переборное решение считается полным, если разобраны ВСЕ варианты. Перебор может осуществляться относительно любой пары (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), не обязательно относительно пары (1,9).