# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

# 2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

# МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

**Авторы задач и составители:** Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

## Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6–7 | Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| 5–6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| 3–4 | В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0–1 | Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

## 7 класс

7.1. Числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ записали в каком-то порядке и обозначили их буквами $a, b, c, d, e, f$. Может ли выполняться равенство

$$(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6) = 75\ ?$$

**Ответ.** Может.

**Решение.** Расставим числа следующим образом:

$$(6-1)(3-2)(4-3)(5-4)(2-5)(1-6) = 75\ .$$

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования (без приведенного примера) — 0 баллов.

7.2. В Солнечном городе 6 коротышек едят пончики ежедневно, 8 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 11 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

**Ответ.** 9.

**Решение.** Из тех 11 коротышек, что вчера ели пончики, 6 коротышек едят их ежедневно, значит остальные $11-6=5$ едят их через день. Поэтому сегодня эти пятеро есть пончики не будут, а остальные $8-5=3$ из тех, кто ест через день – будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те шестеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ $3+6=9$.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования — 2 балла.

7.3. У Васи и Миши телефоны показывают 15% заряда. А через час у Васи – 11%, у Миши – 12%. Может ли телефон Миши разрядиться раньше телефона Васи, если телефоны разряжаются равномерно, а показываемый процент заряда – это округленное до целых значение заряда?

**Ответ.** Может.

**Решение.** Покажем, что Мишин телефон может разрядиться раньше. Пусть изначально заряд Мишиного телефона был 15,4%, Васиного – 14,6%, а через час Мишиного – 11,6%, а Васиного – 11,4%. Значит, за час Мишин телефон разряжается на $15,4-11,6=3,8\%$, а Васин – на $14,6-11,4=3,2\%$. Поэтому Мишин телефон разрядится через $11,6:3,8 \approx 3,1$ часа, а Васин – через $11,4:3,2 \approx 3,6$ часа.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

7.4. Даны девять карточек, на которых написаны числа $5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9$. Из этих карточек сложили три трехзначных числа $A$, $B$, $C$, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения $A+B-C$?

**Ответ.** 149.

**Решение.** Составив наименьшую сумму чисел $A$ и $B$, а также наибольшее число $C$, мы получим наименьшее значение выражения $A+B-C$. Это $566+567-988=145$. Но такое разбиение не подходит: у двух чисел есть одинаковые цифры. Поменяв в разряде единиц местами цифры 6 и 8 получим нужное разбиение: $568+567-986=149$. Почему такое разбиение – лучшее? При любом другом варианте расстановки в разряде сотен цифр мы получим вклад сотен, равный 200, или 300, .... $A$ в разрядах десятков и единиц мы получим положительные значения, так как сумма любых двух из цифр больше любой третьей цифры. Значит, число $A+B-C$ будет больше 200. Итак, $A$ и $B$ начинаются с цифр 5, а $C$ – с цифры 9. Аналогично получаем, что вторые цифры чисел $A$ и $B$ должны быть 6, а числа $C$ – 8. Про единицы сказано выше.

**Комментарий.** Верный ответ и пример чисел $A$, $B$, $C$ без обоснования минимальности — 4 балла.

7.5. За круглый стол сели 10 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего 5 человек сказали: «У меня одна монета», а остальные 5 сказали: «У меня нет монет». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

**Ответ.** 7.

**Решение.** После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. А суммарное число монет будет равно 10. Заметим, что если человек солжет, то он назовет количество монет, которое отличается от настоящего на 1 или 2. Так как по ответам суммарное число монет отличается от настоящего на $10-5=5$, то не меньше 3 человек должны были солгать. Поэтому за столом сидит не больше 7 рыцарей. Пусть рыцари за столом сидят и передают монеты так (стрелочкой показано, куда передается монета; в скобках указано количество монет после передачи): $\leftarrow$ Р(0) – Р(0) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Л(1)$\rightarrow$ Л(2) $\leftrightarrow$ Л(2) $\leftarrow$. При этом все рыцари говорят правду, а лжецы лгут, говоря, что у них 0 монет.

**Комментарий.** Доказано, что за столом сидит не более 7 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 7 рыцарей — 2 балла.