ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители: Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

8 класс

8.1. Чему равна сумма цифр числа $A = 10^{50} - 10^{40} + 10^{30} - 10^{20} + 10^{10} - 1$?

Ответ. 270.

Решение. Число равно сумме трех чисел: числа, составленного из 10 девяток, после которых следуют 40 нулей, числа из 10 девяток, после которых следуют 20 нулей, наконец, числа из 10 девяток. Все девятки приходятся на нули в других слагаемых, поэтому переноса разрядов не происходит, и ответ равен $90 + 90 + 90 = 270$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

8.2. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, при этом такое, что сумма любых двух его цифр — простое число.

Ответ. 520.

Решение. Если искомое число хотя бы четырехзначное, то у него либо три цифры одной четности, либо две пары цифр одной четности. В каждом из этих случаев получаем, что две из сумм цифр – четные. Значит, они должны равняться 2. А число 2 представимо в виде суммы разных цифр единственным способом: $0 + 2$. Трехзначным числом, удовлетворяющим условию, является 520. Покажем, что большего числа быть не может. У трехзначного числа есть две цифры одной четности, и, как мы показали выше, эти цифры могут быть только 0 и 2. Третья цифра должна быть нечетной. Цифра 9 не подходит: $9 + 0 = 9$ – составное число. Цифра 7 не подходит: $7 + 2 = 9$. А цифра 5 подходит.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла. Доказано, что число не более чем трехзначное — 2 балла.

8.3. У Васи и Миши телефоны показывают 15% заряда. А через час у Васи – 11%, у Миши – 12%. Может ли телефон Миши разрядиться раньше телефона Васи, если телефоны разряжаются равномерно, а показываемый процент заряда – это целая часть значения заряда? Целая часть числа A – это наибольшее целое число, не превосходящее A.

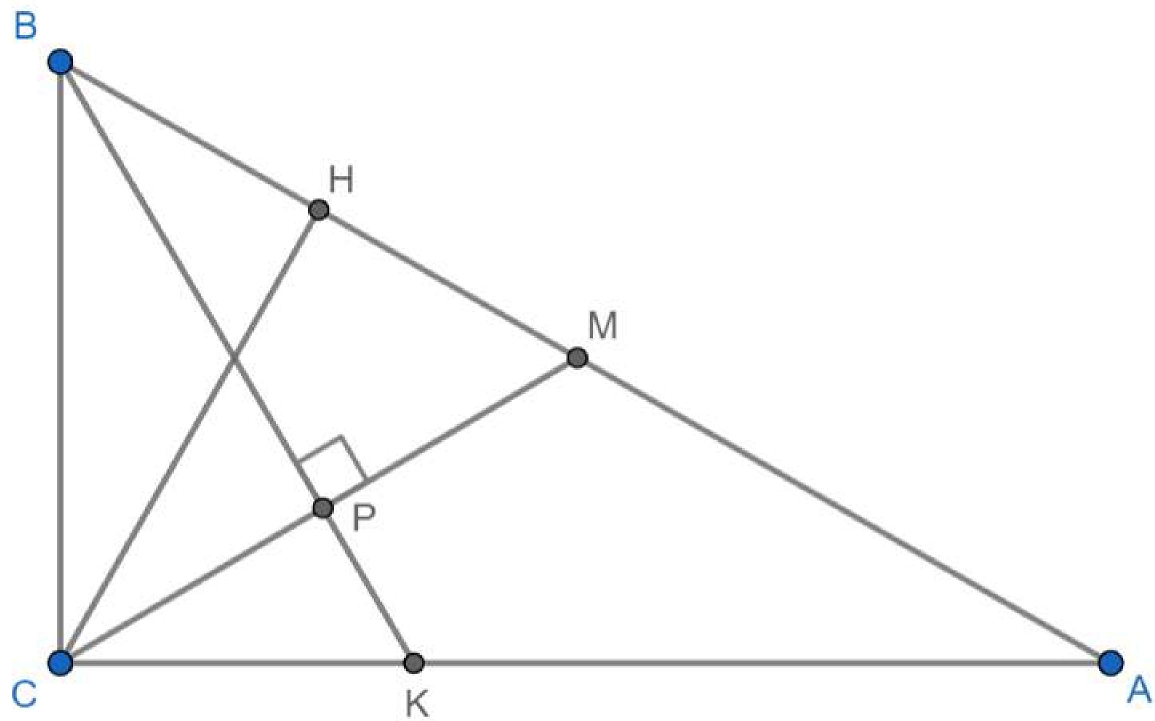
Ответ. Может.

Решение. Покажем, что Мишин телефон может разрядиться раньше. Пусть изначально заряд Мишиного телефона был 15,9%, Васиного – 15,0%, а через час Мишиного – 12,0%, а Васиного – 11,9%. Значит, за час Мишин телефон разряжается на $15,9 - 12,0 = 3,9\%$, а Васин – на $15,0 - 11,9 = 3,1\%$. Поэтому Мишин телефон разрядится через $12,0 : 3,9 \approx 3,1$ часа, а Васин – через $11,9 : 3,1 \approx 3,8$ часа.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

8.4. Дан прямоугольный треугольник ABC (AB – гипотенуза). На большем катете AC треугольника ABC выбрана точка K так, что $AK = BK$. Пусть CH – высота треугольника ABC, и точка M симметрична точке B относительно точки H. Докажите, что отрезки BK и CM перпендикулярны.

Решение. Пусть P – точка пересечения отрезков BK и CM. Нам нужно доказать, что угол BPM прямой, то есть что сумма углов $\angle PMB = \angle CMB$ и $\angle PBM = \angle KBM$ равна $90°$. Но угол CMB равен углу CBM $(= \angle CBA)$, так как треугольник BCM – равнобедренный, а угол KBA равен углу CAB. Осталось заметить, что сумма углов CBA и CAB равна $90°$.



8.5. За круглый стол сели 10 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего каждый сказал: «У меня монет больше, чем у соседа справа». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 6.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. Заметим, что 3 рыцаря не могут сидеть подряд. Действительно, пусть рыцари A, B, C сидят рядом, причем B сидит справа от A, C сидит справа от B, а еще справа от C сидит D. Если у A будет x монет, у B – y монет, у C – z монет, а у D – t монет, то будет выполняться неравенство $x > y > z > t$, которое невозможно для чисел 0, 1, 2. Значит, среди любых 3 подряд сидящих есть лжец. Выберем какого-нибудь из лжецов, сидящего за столом (такой есть, так как за столом есть 3 подряд сидящих), а оставшихся разобьем на 3 группы по 3 человека сидящих рядом. В каждой из этих групп есть лжец. Значит, за столом сидит не менее $1+3 = 4$ лжецов, и поэтому не более 6 рыцарей. Покажем, что за столом могло сидеть 6 рыцарей. Пусть они сидят так: -Р-Р-Л-Л-Р-Р-Л-Р-Р-Л-. И сидящие рядом рыцари обменяются монетами, а лжецы отдадут свои монеты людям, сидящим от них справа. Тогда количества монет у сидящих будет -Р(2)-Р(1)-Л(0)-Л(1)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-. И рыцари скажут правду, а лжецы солгут.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 6 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 6 рыцарей — 2 балла.