ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители: Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9 класс

9.1. Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 4$, то получится 24. Найдите $f(-2)$.

Ответ. 6.

Решение. Имеем: $D_1 - D_2 = 4(b^2 - ac - (b+2)^2 + (a+1)(c+4)) = 4(-4b + 4a + c) = 4f(-2)$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

9.2. За круглый стол сели 6 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего 3 человек сказали: «У меня одна монета», а остальные 3 сказали: «У меня нет монет». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 4.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. А суммарное число монет будет равно 6. Заметим, что если человек солжет, то он назовет количество монет, которое отличается от настоящего на 1 или 2. Так как по ответам суммарное число монет отличается от настоящего на $6 - 3 = 3$, то не меньше 2 человек должны были солгать. Поэтому за столом сидит не больше 4 рыцарей. Пусть рыцари за столом сидят и передают монеты так (стрелочкой показано, куда передается монета; в скобках указано количество монет после передачи): $\leftrightarrow$ Л(1) – Р(0) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Л(2) $\leftrightarrow$. При этом все рыцари говорят правду, а лжецы лгут, говоря, что у них 0 монет.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 4 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 4 рыцарей — 2 балла.

9.3. На доске написано N простых чисел (не обязательно различных). Оказалось, что сумма любых трех чисел на доске — тоже простое число. При каком наибольшем N это возможно?

Ответ. $N = 4$.

Решение. Рассмотрим остатки при делении на 3 написанных N чисел. Все 3 остатка встречаться не могут, так в этом случае сумма трех чисел с различными остатками будет делиться на 3 (и будет больше 3), поэтому она не будет простым числом. Поэтому возможных остатков не больше 2. Также заметим, что чисел с одинаковым остатком не может быть 3, так как сумма этих трех чисел будет делиться на 3 (и будет больше 3), поэтому она не будет простым числом. Таким образом, N не может быть больше $2 \cdot 2 = 4$.

N может равняться 4. Например, если на доске написаны числа $3, 3, 5, 5$ (суммы $11, 13$).

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, $3, 3, 5, 11$ (суммы $19, 17, 11$).

Комментарий. Доказано, что N не больше 4 — 5 баллов.

Приведен пример с 4 числами — 2 балла.

9.4. Вася вырезал из картона треугольник и занумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол равный углу при этой вершине 15 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Если повернуть по часовой стрелке Васин треугольник вокруг его вершины под номером 2 на угол равный углу при этой вершине 6 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник вокруг вершины под номером 3 на угол равный углу при этой вершине n раз, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ. 5.

Решение. Пусть угол при первой вершине равен α градусов, при второй β градусов, а при третьей γ градусов. При поворотах вокруг вершин Васин треугольник прежде чем вернуться в стартовое положение мог сделать несколько полных оборотов. Пусть при вращении вокруг первой вершины он сделал k полных оборотов, при вращении вокруг второй – m полных оборотов, вокруг третьей – l. Тогда из условия задачи следует, что $15\alpha = 360k$, $6\beta = 360m$ и $n\gamma = 360l$. Из первых двух уравнений находим, что $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$, значит $\alpha \geq 24$, $\beta \geq 60$. Заметим что $n \geq 4$, так как иначе $\gamma > 120$, что в сумме с β больше 180. $n \neq 4$, поскольку иначе $\gamma = 90$, значит $\alpha + \beta = 90$, чего быть не могло в силу $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$.

$n = 5$ подходит: возьмем треугольник с углами $\alpha = 48, \beta = 60, \gamma = 72$.

Комментарий. Доказано, что $n \geq 4$ — 3 балла.

Доказано, что $n \neq 4$ — 2 балла.

Приведен пример для $n = 5$ — 2 балла.

Если наименьшее значение не найдено, но приведен пример треугольника с таким свойством — 1 балл.

9.5. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса CL. Точка K выбрана на гипотенузе этого треугольника так, что $AL = BK$. Перпендикуляр к AB, проходящий через точку K, пересекает луч CL в точке N. Докажите, что $KN = AB$.

Решение. Отметим середину AB, точку M, она же середина LK, так как $AL = BK$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает биссектрису CL в точке

D на описанной окружности ω треугольника ABC. Действительно, биссектриса CL проходит через середину дуги BA, но и серединный перпендикуляр к хорде BA, стягивающей эту дугу, также проходит через ее середину. Точка M – центр окружности ω, так как угол C прямой, значит, $MD = MA = AB/2$. Но MD – средняя линия треугольника LKN, так как $MD||KN$ и M – середина LK, значит, $KN = 2MD = AB$.