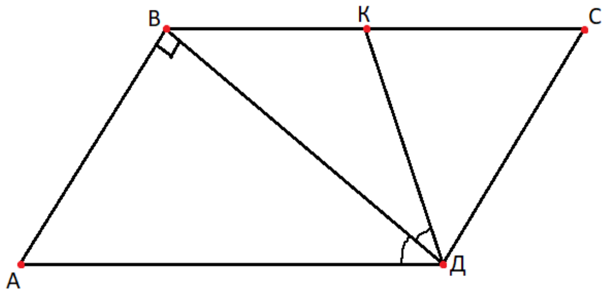
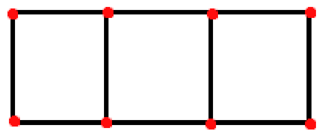
9 класс

1. **Ответ: $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=-4}$, $\boldsymbol{c=-2}$.** Так как $b=c-a$, то $a\cdot c=c-a$ или $a\cdot c-c+a=0$. Отнимем 1 с обеих частей равенства и получим $a\cdot c-c+a-1=(a-1)\cdot(c+1)=-1=1\cdot(-1)=(-1)\cdot 1$. Так как a и c – числа целые, то и скобки $(a-1)$ и $(c+1)$ тоже целые и равны 1 или -1. Так как a и c различные числа, возможен только случай $(a-1)=1$ и $(c+1)=-1$. Откуда $a=2$, $b=-4$, $c=-2$.
Критерии: ответ без обоснования – 1 балл.
Ответ с обоснованным подбором – 2 балла.
2. **Ответ: ВК:КС=1:1.** Т.к. АВСД параллелограмм, то ∠ABD=∠CDB=90 (накрест лежащие углы). Пусть ∠ADB=α. Тогда ∠BAD=∠BCD=90 – α. Кроме того ∠ADB=∠DBK=α=∠KDB (накрест лежащие углы). Тогда получается, что треугольник ВКД – равнобедренный. Тогда ВК=КД. Далее ∠CDK=∠CDB - ∠KDB= 90 – α= ∠BAD. Тогда треугольник СДК – равнобедренный. Тогда СК=КД. Получаем, что СК=КД=ВК. Тогда ВК:КС=1:1.



3. **Ответ: 450 км.** В первом случае поезд из пункта А имеет преимущество над поездом из пункта В в 4 часа, а во втором случае наоборот поезд из пункта В имеет те же 4 часа преимущества над поездом из пункта А. Т.к все поезда имеет одинаковую скорость, то из этого можно сделать вывод, что поезд В в первом случае проехал столько же, сколько поезд А во втором случае. Значит Расстояние между пунктами А и В равно 300+600=900. Тогда два поезда с одинаковой скоростью выезжающие одновременно встретятся на полпути, значит на расстоянии 450 км от пункта А.
4. Докажем неравенство равносильную данной
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}<0.$$
Действительно,
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}=\frac{2}{1-a^2}\ ,$$
$$\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}=\frac{4}{1-a^4}\ ,$$
$$\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}=\frac{8}{1-a^8}\ ,$$
$$\frac{8}{1-a^8}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}$$
То есть $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}=\frac{16}{1-a^{16}}<0$. Последнее неравенство очевидно для всех $a>1$. Чтд.
5. **Ответ: n=127.** Оценка: Подсчет удобнее проводить по узлам клеток. Например, в прямоугольнике 1 × 3 таких узлов восемь (на рисунке отмечены красными точками). А на доске n × n таких узлов (n+1) × (n+1). Т.к. плитки не имеют общих точек, то узлы у каждой плитки будут только свои. Тогда чтобы разместить 2021 плитки на доске понадобится хотя бы 2021·8=16168 узлов. Решая неравенство 16168 ≤ (n+1) × (n+1), получим, что n+1 ≥ 128 или n ≥ 127.



Пример: Покажем, что на доске 127×127 можно уместить 2021 прямоугольник.

Таким образом на доску 127×127 можно поставить $\frac{(127+1)}{2} \times \frac{(127+1)}{4}$ = 64·32=2048 плиток, а значит и 2021 поместится.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 3 балла.