10 класс

10.1. (*7 баллов*)

Докажите, что $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\ раз}-\underbrace{22\ldots2}_{n\ раз}}=\underbrace{33\ldots3}_{n\ раз}$.

Решение:

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\ раз}-\underbrace{22\ldots2}_{n\ раз}}=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n\ раз}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\ раз}}=\frac{1}{3}\sqrt{(10^{2n}-1)-2(10^{n}-1)}=\frac{1}{3}\sqrt{(10^{n}-1)^{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}(10^{n}-1)=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\ раз}=\underbrace{33\ldots3}_{n\ раз}.$$

10.2. (*7 баллов*)

Петя сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

Ответ: 42.

Решение: пусть S – длина эскалатора в ступеньках, x – скорость эскалатора, V – собственная скорость Пети.

Движение Пети относительно земли:

	V	t	S
Движение вниз	$V+x$	t_1	$(V+x)t_1=S$
Движение вверх	$V-x$	t_2	$(V-x)t_2=S$

Движение Пети относительно эскалатора:

	V	t	S
Движение вниз	V	t_1	30
Движение вверх	V	t_2	70

Составим систему:

$$\begin{cases}(V+x)t_1=S,\\(V-x)t_2=S,\\V\cdot t_1=30,\\V\cdot t_2=70\end{cases}$$

Выразим из последних равенств t_1, t_2 и подставим в первые два равенства соответственно:

$$\begin{cases}(V+x)\cdot\dfrac{30}{V}=S,\\(V-x)\cdot\dfrac{70}{V}=S.\end{cases}$$

Решая данную систему относительно S, получаем: $S = 42$.

10.3. (*7 баллов*)

Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b и c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ и $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

Решение: докажем методом от противного. Пусть уравнения не имеют действительных корней. Тогда $4b^2 - 4ac < 0, 4c^2 - 4ab < 0$, $4a^2 - 4bc < 0$.

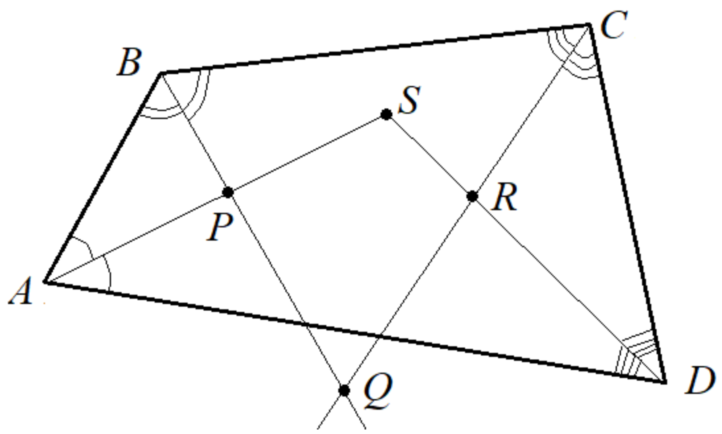
Следовательно, $b^2 < ac$, $c^2 < ab$, $a^2 < bc$.

Так как правые части положительные, то левые тоже будут положительными и поэтому имеем право почленно перемножить неравенства. Получим, что $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$. Получили противоречие. Следовательно, хотя бы одно уравнение имеет корень.

10.4. (*7 баллов*)

Докажите, что если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

Решение:



Пусть AP, BQ, CR, DS – биссектрисы внутренних углов четырёхугольника $ABCD$ и α, β, γ, φ – величины этих углов. Тогда

$$\angle ASD = 180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{2}, \quad \angle BQC = 180^o - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Сложим равенства:

$$\angle ASD + \angle BQC = 360^o - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \varphi + \gamma) = 360^o - \frac{1}{2} \cdot 360^o = 180^o.$$

Или

$$\angle PSR + \angle PQR = 180^o.$$

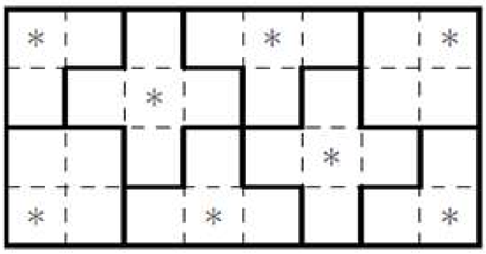
Следовательно, точки P, S, R, Q лежат на одной окружности.

10.5. (*7 баллов*)

На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

Ответ: при восьми лжецах.

Решение: Разобьем все места в президиуме на восемь групп так, как показано на рисунке. Если лжецов меньше восьми, то в какой-то из этих групп сидят одни правдолюбы, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что лжецов не меньше восьми. На рисунке показано, как можно рассадить в президиуме восемь лжецов так, чтобы выполнялось условие задачи.



	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Комментарии. *При отсутствии примера рассадки лжецов – 5 баллов.*