Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2021 г.)

10 класс

1. Число, выражающее площадь одного прямоугольника, составленного из спичек (принимаем, что длина спички равна 1) на единицу больше числа, выражающего периметр этого прямоугольника, а площадь второго прямоугольника на единицу меньше его периметра. Каковы размеры этих прямоугольников?

Решение. Обозначим длины сторон первого прямоугольника через x и y. Тогда из условия задачи xy = 2(x+y)+1. Отсюда y = $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$. Чтобы число y было целым при целом x, нужно чтобы x-2=1 или x-2=5. В первом случае получаем x=3, y=7, а во втором случае x=7, y=3. Аналогично находим размеры второго прямоугольника.

Ответ: Первый прямоугольник - 7×3, второй - 5×3.

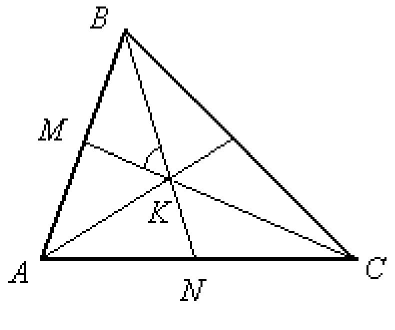
2. Найдите площадь треугольника, если известно, что его медианы *CM* и *BN* равны 6 и 4,5 соответственно, а $\angle BKM = 45^o$, где *K* – точка пересечения медиан.

Решение. На рисунке изображен данный треугольник *ABC*, в котором медианы *CM* и *BN* равны 6 и 4,5 соответственно, $\angle BKM = 45^o$, *K* – точка пересечения медиан. Легко доказать, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников. Поэтому в нашем случае, чтобы найти площадь ΔABC, достаточно найти площадь ΔBKM и увеличить её в 6 раз.

По свойству точки пересечения медиан $\frac{BK}{BN} = \frac{2}{3}$ и $\frac{MK}{CM} = \frac{1}{3}$, значит, $BK = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\cdot 4{,}5 = 3$, $MK = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$. Тогда $S_{\Delta BKM} = \frac{1}{2}BK\cdot MK\cdot \sin\angle BKM = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \sin 45^0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Поэтому

$S_{\Delta ABC} = 6\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$.

Ответ: $9\sqrt{2}$.



3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0, \\ x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение:

$$\left(x^5+3x^4+4x^3+x^2\right)+x^3+4x^2+6x+2=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2\left(x^3+3x^2+4x+1\right)+\left(x^3+3x^2+4x+1\right)+x^2+2x+1=0.$$

Учитывая, что $x^3+3x^2+4x+1=0$, получим $x^2+2x+1=0$. Решив последнее уравнение, найдем x = -1. Значит, это значение x может быть решением системы. Сделав проверку, убеждаемся, что x = -1 не удовлетворяет системе уравнений.
Ответ: система не имеет решений.

4. Испытания показали, что шестипроцентная добавка в бензин метанола сокращает расход горючего при работе автомобильного двигателя до 15%. При каком количестве бензина удастся таким образом сэкономить 100 л бензина?
Решение. При шестипроцентной добавке метанола в каждых 100 л смеси содержится 6 л метанола и 94 л бензина, следовательно, экономится 6 литров бензина. Но из 94 л бензина удается сэкономить дополнительно $\frac{15\% \cdot 94}{100\%}=14$ (л). Следовательно, на каждые 100 л бензина удастся сэкономить 20л. Значит, 100 л бензина можно сэкономить примерно из 500 л.
Ответ: 500 л.

5. Постройте график функции

$$y=\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}.$$

Решение. $D(y)$ = $\mathbf{R}_+$. После упрощения получаем:

$$y=\frac{1+x+|1-x|}{1+x-|1-x|}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{при } 0<x<1,\\ x, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

График функции показан на рисунке.