10 класс

10.1. Натуральные числа начиная с 1 выписаны подряд. Получается последовательность цифр: 1234567891011121314… Какая цифра стоит на 2021 месте?

Ответ. 1.

Решение. Заметим, что сумма цифр всех однозначных и двузначных чисел равна 189 < 2021, а сумма всех трехзначных чисел 3 · 900 = 2700 > 2021. Значит, цифра6 стоящая на 2021 месте принадлежит к записи некоторого трехзначного числа.

Пусть x – некоторое трёхзначное число, тогда сумма цифр в последовательности от 1 до x равна $n = 189 + 3(x - 99)$. Имеем $189 + 3(x - 99) < 2021$, $3x < 2129$, $x < 709\frac{2}{3}$. Последовательность чисел от 1 до 709 содержит 189 + 3 · (709 – 99) = 2019 цифр. Следовательно, на 2021 месте стоит вторая цифра числа 710, то есть 1.

10.2. Что больше 2021^{2021} или 2022^{2020}?

Ответ. $2021^{2021} > 2022^{2020}$.

Решение. Рассмотрим отношение $\frac{2022^{2020}}{2021^{2021}} = \frac{2022^{2021} \cdot 2022^{-1}}{2021^{2021}} = \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2021} \cdot \frac{1}{2022} = \left(\frac{2021+1}{2021}\right)^{2021} \cdot \frac{1}{2022} = \left(1 + \frac{1}{2021}\right)^{2021} \cdot \frac{1}{2022} < 3 \cdot \frac{1}{2022} < 1$. Следовательно $2021^{2021} > 2022^{2020}$.

Замечание. Здесь использовался тот факт, что $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < 3$.

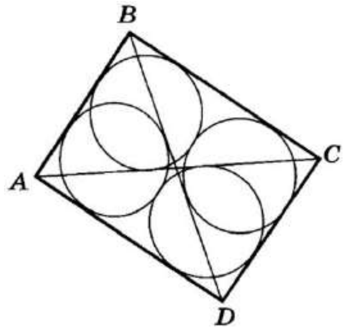
10.3. Докажите неравенство: $\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 8$, где $a > 0$ и $b > 0$.

Решение. Для доказательства воспользуемся неравенствами: $x^2 + 1 \geq 2x$ и $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$$\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} = \frac{a^2+1+2a}{b} + \frac{b^2+1+2b}{a} \geq \frac{4a}{b} + \frac{4b}{a} = 4 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$$

10.4. Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABC, BCD, CDA* и *DAB,* равны. Докажите, что *AC* = *BD.*

Решение. Пусть r - радиусы указанных в условии окружностей. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2} r\,(AB + BC + CA) + \frac{1}{2} r\,(CD + DA + AC) =$ $= \frac{1}{2} r{\cdot}P + r{\cdot}AC,$ где S и P площадь и периметр четырехугольника $ABCD$. Аналогично $S_{ABCD} = S_{BDC} + S_{DAB} = \frac{1}{2} r{\cdot}P + r{\cdot}BD,$ откуда следует: $AC = BD$.



10.5. На торжественной линейке каждому ученику раздали их праздничные индивидуальные фотографии, сделанные накануне. Оказалось, что каждый ученик получил фотографию, на которой был изображён другой ученик. Они решили поменяться фотографиями, чтобы каждый получил свою. Но чтобы это было незаметно, фотографиями могли меняться только ученики, стоящие рядом. Причём, если к ученику попадала его фотография, то он отказывался дальше мен Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места?

Ответ. Да, всегда сможет.

Решение.

4. Занумеруем всех зрителей номерами их билетов 1, ..., *n*. Пусть, для определенности, самое правое место имеет номер *n*, а самое левое — номер 1. Мы сведем задачу к той же задаче с меньшим числом зрителей, пересадив зрителя *n* на свое место.

Пусть билетер действует следующим образом. Он пересаживает зрителя n вправо, если его правый сосед при этом не садится на свое место. Если зрителя n не удается пересадить правее места k, то на $(k+1)$-м месте сидит зритель k. Выберем наибольшее m такое, что зрители с номерами k, $k+1$, $\ldots$, $k+m-1$ сидят на местах $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $k+m$ соответственно. Возможны два случая: $k+m<n$ или $k+m=n$.

В первом случае на $(k+m+1)$-м месте сидит зритель j, $j \neq k+m$. Ясно, что $j \neq k+m-1$, $j \neq k+m-2$, $\ldots$, $j \neq k+1$.

Поэтому можно пересадить зрителя j налево, потом еще раз налево и т. д., пока он не поменяется местами со зрителем n. В результате билетеру удастся пересадить зрителя n на одно место правее, причем все зрители слева от n сидят на чужих местах. Билетер может повторять эту процедуру до тех пор, пока не произойдет одно из двух: зритель n окажется на своем месте или встретится второй случай $(k+m=n)$.

Во втором случае билетер может рассадить по своим местам зрителей k, $k+1$, $\ldots$, n, пересаживая зрителя n вправо до его места.

Таким образом, несколько зрителей в правом конце ряда будут сидеть на своих местах, а остальные — нет. Мы свели задачу к исходной с меньшим числом зрителей.

Критерии и методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

На олимпиаде должна использоваться 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6 – 7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5 – 6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2 – 3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0 – 1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов зато, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.