Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2021– 2022 учебный год
Математика
10 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

10.1. Рассматриваются функции вида $y = x^2 + ax + b$, где $a + b = 2021$. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.

Решение. $y(1) = 1 + a + b = 2022$. Следовательно, каждый из данных графиков проходит через точку с координатами (1; 2022).

10.2. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз? (Н. Агаханов, И. Богданов)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 48$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 45 = 720 = 15 \cdot 48$.

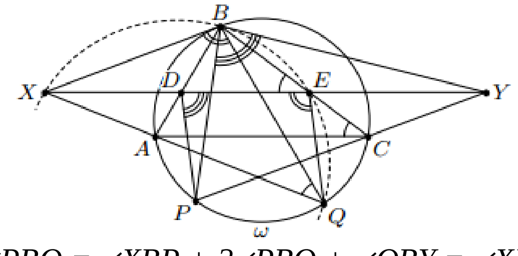
Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что четыре из сомножителей равнялись 1, а пятый — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^4(a-3) = 16a-48$. Значит, при $16a-48 = 15a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 48$.
Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.
Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию —7 баллов.
Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, a, где значение а ошибочно — 5 баллов.

10.3. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S_{2022} — наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?
Ответ: a_1 принадлежит интервалу (-2022; -2021).
Решение. Так как разность прогрессии положительна, то прогрессия — возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессии с первого по 2022-ый — отрицательны, а начиная с 2023-ого — положительны. Таким образом, S_{2022} будет наименьшей, тогда и только тогда, когда $a_{2022} < 0$, а $a_{2023} > 0$. Отсюда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_1 + 2021 < 0, \\ a_1 + 2022 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \ -2022 < a_1 < -2021.$$

10.4. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?
Ответ. Не может.
Первое решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел является чётным числом, так как содержит ровно 50 нечётных слагаемых. А сумма 98 последовательных натуральных чисел является нечётным числом, так как содержит ровно 49 нечетных слагаемых. Поэтому эти суммы оканчиваются на цифры разной чётности.
Второе решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчивается на 0, а сумма никаких двух подряд идущих чисел на 0 не оканчивается. Значит, не заканчивается на 0 и сумма никаких 98 подряд идущих чисел.

10.5. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$. (А. Кузнецов)
Решение.
Так как четырёхугольник $ABCQ$ вписан и $AC \parallel DE$, имеем $\angle BEX = \angle BCA = \angle BQA = \angle BQX$. Следовательно, четырёхугольник $XBEQ$ вписан, откуда $\angle XBQ = \angle XEQ = \angle DEQ$. Аналогично, четырёхугольник $YBDP$ вписан, и $\angle PBY = \angle PDE$. По условию, $PD \parallel EQ$. Значит, $180^\circ = \angle PDE + \angle DEQ = \angle XBQ + \angle PBY$.



Таким образом, $\angle XBY + \angle PBQ = \angle XBP + 2\angle PBQ + \angle QBY = \angle XBQ + \angle PBY = 180^\circ$.
Комментарий. Показано только, что точки X, B, E, Q (или Y, B, D, P) лежат на одной окружности — 3 балла.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.