Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 10.1
Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби
$\frac{m}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}$ делится на p.
Количество баллов 7
Подсказка
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}=\frac{p}{k(p-k)}$$
Решение
Разобьём дроби на пары со знаменателями k и $p-k$.
Сумма таких дробей имеет числитель p, а её знаменатель не кратен p, поскольку p простое число.
Значит, после сложения всех дробей получим дробь с числителем, кратным p, и знаменателем, не кратным p.

Задание 10.2

В десятичной записи числа $^1/_7$ зачеркнули 2021-ю цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось?

Количество баллов 7

Ответ:

увеличилось

Решение

Выполнив деление числителя на знаменатель, получим, что $^1/_7 = 0,(142857)$.

Значит, период получившейся дроби содержит 6 цифр.

Так как число 2021 при делении на 6 дает остаток 5, то 2021-я цифра после запятой в десятичной записи числа $^1/_7$ – это пятая цифра периода, то есть цифра 5.

После её зачеркивания на этом месте будет стоять цифра 7.

Следовательно, исходное число увеличилось.

Дополнительные критерии

Получили только период дроби – 3 балла

Задание 10.3

Даны две одинаковые шестерёнки с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

Количество баллов 7

Ответ:

не всегда.

Решение

Построим контрпример:

занумеруем зубья по порядку и выпилим зубья с номерами 1, 2, 5, 7.

Как легко проверить, разности этих чисел дают все 13 чисел 0, 1, 2 ... , 12 (*mod* 13).

Поэтому при каждом повороте ровно одна пара "выпиленных зубьев" совпадает.

Задание 10.4

В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены числа +1 и –1, как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знаки у чисел во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак числа в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних положительных чисел.

+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	–1
+1	+1	+1	+1

Количество баллов 7

Подсказка

Не обращайте внимания на угловые и центральные клетки.

Решение

Отметим в таблице 8 клеток (см. рисунок справа).

	●	●	
●			●
●			●
	●	●	

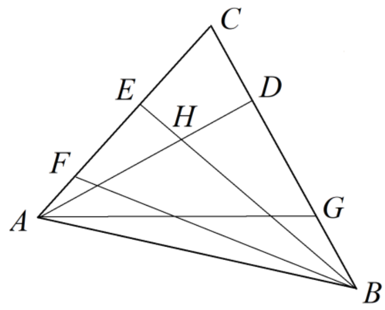
Каждая строка и каждый столбец содержат по 2 отмеченных клетки, каждая диагональ – по 0 или 2. Поэтому чётность количества отрицательных чисел в отмеченных клетках не меняется.

Следовательно, согласно условию, отрицательных чисел в этих клетках всегда будет нечётное количество.

Дополнительные критерии

Предложена только раскраска, как на рисунке в решении, но решение не закончено – 3 балла

Задание 10.5
Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если DE = 5 см.
Количество баллов 7
Ответ:
FG = 10 см
Решение



У нас всего одно числовое данное.
Значит, длина FG будет либо равна ED, либо кратна ему. На равенство не похоже. Должна быть больше (судя по рисунку), во сколько-то раз. Что мы знаем про такие соотношения? Есть средняя линия треугольника, которая меньше основания в два раза. Попробуем показать, что ED является средней линией в треугольнике FCG. Нам нужно, чтобы E была серединой FC. Посмотрим на треугольник FCB. В нем есть высота BE. Попробуем показать, что она еще и биссектриса (так как у нас еще есть описанная окружность, а окружность – это углы). На FH опираются два угла: FAH и HBF. Значит, они равны. Обозначим α. Тогда из прямоугольных треугольников получим $\angle C = 90^0 - \alpha$ и $\angle CBE = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$. Убедились, что BE высота и биссектриса, а значит медиана. Аналогично AD – медиана для треугольника CAG. Итак, ED – средняя линия в треугольнике FCG и следовательно FG = 10 см.