10 класс

1. Решите в целых числах уравнение $1 + 2^n + 3^n + 5^n = 2k$.

Решение

При $n \geq 1$ слева получается нечетное число, а $2k$ четное, поэтому решений нет.
При $n = 0$ получаем $k = 2$.
При $n = -1$ получаем уравнение, которое не имеет целого решения для k.
При $n \leq -2$ выражение слева принимает значения большие 1, но меньшие 2. Поэтому целого решения уравнения для k нет.
Поэтому уравнение имеет единственное решение $n = 0$, $k = 2$.

Критерии оценивания

Только верный ответ - 1 балл.
Верно и полно рассмотрен случай неотрицательных значений n - 2 балла.
Верно и полно рассмотрен случай для отрицательных значений n - 4 балла.
Баллы суммируются.

2. Доказать, что найдется число вида 20212021…2021…20210…0, которое делится на 2022.

Решение

Запишем числа 2021, 20212021, 202120212021,….,2021….2021. В последнем числе запись 2021 повторяется 2022 раза. Рассмотрим остатки от деления каждого из этих чисел на 2022.

Ни одно из записанных чисел, не делится на число 2022 , так как все они нечетные. Записанных чисел больше, чем ненулевых остатков, поэтому найдутся два из них с одинаковым остатком. Их разность имеет требуемый вид и делится на 2022.

Критерии оценивания

Обоснованно проведенное доказательство - 7 баллов.
Приведены отдельные рассуждения, значимые для доказательства - от 1-4 баллов.
За неточности в рассуждениях снимать от 1 до 2 баллов.

3. Имеется 250 мл 70%го раствора уксусной кислоты и 500 мл 5%го раствора уксусной кислоты. Найдите наибольший объем p%го раствора уксусной кислоты, который можно получить из имеющихся в наличии растворов (водой доливать нельзя).

Решение

Пусть берем x мл 70%го раствора, а V мл – объем получаемого p%го раствора. Тогда имеем уравнение

$$0{,}7x + 0{,}05(V - x) = \frac{p}{100}V$$

из которого находим

$$\frac{x}{V} = \frac{p - 5}{65}$$

То есть берем $(p - 5)$ частей 70%го раствора и $(70 - p)$ частей 5%го раствора.
Наибольший объем 9%го раствора получится тогда и только тогда, когда хотя бы один из имеющихся растворов взят полностью.
Если взять весь 5%й раствор, то 1/65 получаемого раствора составят $\frac{500}{70-p}$ мл. Тогда 70%го раствора нужно взять $\frac{500}{70-p} \times (p - 5)$ мл. Это возможно сделать, если $\frac{500}{70-p} \times (p - 5) \leq 250$. Решением неравенства с учетом условия $5 < p < 70$ являются значения p , удовлетворяющие условию $5 < p \leq \frac{80}{3}$. При этих значениях p наибольший объем равен $\frac{500}{70-p} \times 65$ мл.

В противном случае берем весь 70% раствор, то 1/65 получаемого раствора составят $\frac{250}{p-5}$ мл. Тогда 50%-го раствора нужно взять $\frac{250}{p-5} \times (70-p)$ мл. Это возможно сделать, если $\frac{250}{p-5} \times (70-p) \leq 500$. Решением неравенства с учетом условия $5 < p < 70$ являются значения p, удовлетворяющие условию $\frac{80}{3} \leq p < 70$. При этих значениях p наибольший объем равен $\frac{250}{p-5} \times 65$ мл.

Критерии оценивания

Неверно составлено уравнение по условию задачи - 0 баллов.

Только верно составлено уравнение по условию задачи - 1 балл.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейшем решении допущена вычислительная ошибка или ошибка в преобразовании выражения, решении неравенства, при этом ход решения верный, обоснования правильные - 4 балла.

Верно составлено уравнение по условию задачи. Однако в дальнейших рассуждениях есть ошибка, поэтому ход решения неправильный - 1 балл.

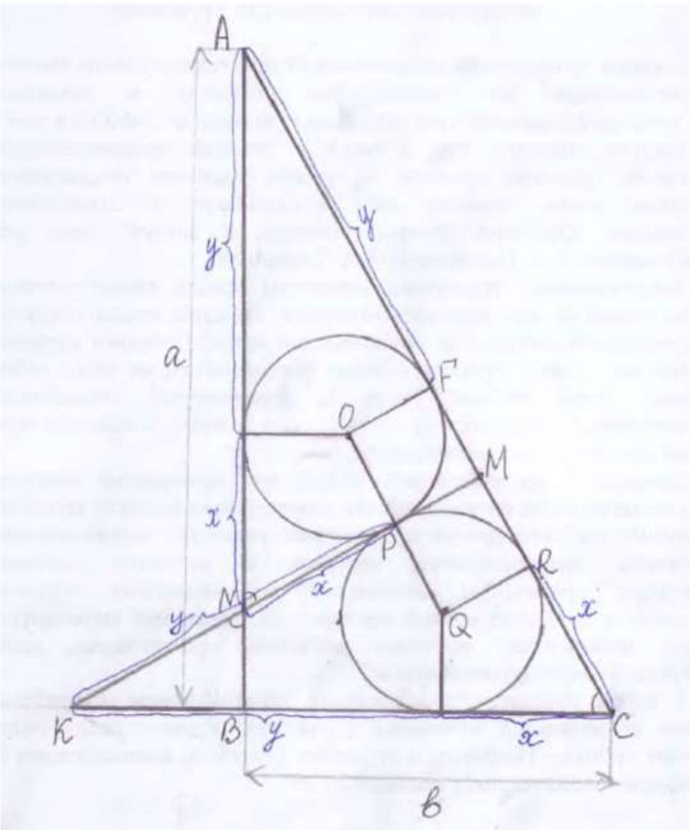
Верно составлено уравнение по условию задачи. Дальнейшее решение верное, но полностью отсутствуют обоснования (есть только вычисления, преобразования) - 4 балла.

Задача решена правильно, полностью, решение изложено с обоснованиями - 7 баллов.

Если не указано, что для получения наибольшего объема 9%го раствора хотя бы один из имеющихся растворов нужно взять полностью, однако на основе этого соображения осуществляется дальнейшее решение задачи, то баллы не снижаются.

4. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b ($a > b$) расположены две одинаковые окружности. Окружности касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается гипотенузы и одного из катетов. Найдите радиус такой окружности.

Решение



1) Обозначим O и Q центры этих окружностей. OQ параллельна гипотенузе, так как центры окружностей находятся на одинаковом от нее расстоянии и по одну сторону.

2) Обозначим NM касательную к этим окружностям, проходящую через точку касания этих окружностей друг с другом. NM перпендикулярна OQ (так как касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания). Следовательно, NM перпендикулярна гипотенузе.
3) Обозначим за К точку пересечения прямых NM и BC.
Треугольник МСК подобен треугольнику ВСА по двум углам.
Треугольник MNA подобен треугольнику ВСА по двум углам.
Значит, треугольники МСК и MNA подобны.
А поскольку в эти треугольники вписаны равные окружности, то они равны.
Поэтому MN=MC, MK=MA.
Так как MN=MC, то NP=CR (P – точка касания окружностей, R – точка касания окружности с гипотенузой, равенство отрезков объясняется тем, что они есть отрезки MN и MC без радиуса вписанной окружности).
Так как MK=MA, то KP=AF (F – точка касания второй окружности с гипотенузой, равенство отрезков объясняется тем, что они есть отрезки MK и MA без радиуса вписанной окружности).
4) Введем обозначения r – радиус окружности, x и y – длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольников к окружностям.
Длина гипотенузы равна, с одной стороны $x + y + 2r$, а с другой стороны $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Поэтому получаем уравнение $x + y + 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Также BN=AB-x-y=a-x-y, KB=KC-BC=x+y-b.
5) Поскольку углы при вершине N вертикальные и они равны углу при вершине C (из подобия треугольников MNA и BCA), а угол B прямой, то треугольник KBN подобен треугольнику ABC.
Значит, $\frac{KB}{AB} = \frac{BN}{BC}$
Получаем уравнение $\frac{x+y-b}{a} = \frac{a-x-y}{b}$, из которого $x + y = \frac{a^2+b^2}{a+b}$.
Из равенства $x + y + 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ выражаем

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{2}(x + y)$$

Из полученных условий находим $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Критерии оценивания

Доказано, что прямая, проходящая через центры окружностей, параллельна гипотенузе и что касательная, проведенная к окружностям в точку их касания, перпендикулярна гипотенузе – 1 балл.
Доказано, что треугольники МСК и MNA (здесь указано в авторских обозначениях) равны – 2 балла..
Указаны все равные отрезки касательных (нужные для дальнейшего решения) и составлено уравнение $x + y + 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (здесь указано в авторских обозначениях) – 1 балл.
Указаны все равные отрезки касательных (нужные для дальнейшего решения), доказано подобие треугольников KBN и ABC и составлено уравнение $\frac{x+y-b}{a} = \frac{a-x-y}{b}$ (здесь указано в авторских обозначениях) – 2 балла.
Из уравнений $x + y + 2r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\frac{x+y-b}{a} = \frac{a-x-y}{b}$ выражен r - 1 балл.
Баллы суммируются.

5. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ - 2 $\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} \leq 1 - \frac{1}{x}$.

Решение

Пусть $\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} = t$. Тогда первоначальное неравенство преобразуется к системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(t^3-1)^2}{t^2} \leq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

решением которой является только $t = 1$.

Решая уравнение $\sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} = 1$, находим $x = \frac{1}{2}$.

Критерии оценивания

Верное обоснованное решение – 7 баллов.

Допущена вычислительная ошибка, но с ней решение верно доведено до конца (может быть получен неверный ответ) – 1 балл.

Допущена ошибка в преобразованиях, которая исказила ход решения задачи – 0 баллов.

При равносильном переходе (в решении, аналогичном авторскому) потеряно условие $t \geq 0$ - 4 балла.