10 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

10.1. Найдите все возможные функции вида $f(x) = kx - b$, где $k \neq 0$, такие, что $f(f(x)) = 2f(x) - 3f(1-x)$, или докажите, что их не существует. **(7 баллов)**

Решение:

1) $f\big(f(x)\big) = f(kx - b) = k(kx - b) - b = k^2x - kb - b = k^2x + (-kb - b)$
2) $2f(x) - 3f(1-x) = 2(kx - b) - 3(k(1-x) - b) = 2kx - 2b - 3(k - kx - b) = 2kx - 2b - 3k + 3kx + 3b = 5kx + (b - 3k)$
3) Приравнивая коэффициенты, получаем: $\begin{cases} k^2 = 5k \\ -kb - b = b - 3k \end{cases}$.
4) Пользуясь тем, что $k \neq 0$, получаем: $\begin{cases} k = 5 \\ -5b - 2b = -15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ b = 2\frac{1}{7} \end{cases}$.

Ответ: $f(x) = 5x - 2\frac{1}{7}$.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи	7
2. Верное решение, но не исключено, что $k \neq 0$.	6
3. Допущена ошибка при приведении подобных слагаемых, повлиявшая на ответ, при исправлении которой, решение может быть признано полным.	5
4. Раскрыты оба выражения $f\big(f(x)\big)$ и $2f(x) - 3f(1-x)$ по отдельности. Получено тождество $(k^2 - 5k)x + (-kb - 2b + 3k) = 0$, дальнейших продвижений нет.	3
5. Раскрыто выражение $f\big(f(x)\big)$ или $2f(x) - 3f(1-x)$, дальнейших продвижений нет.	1
6. Неверное решение .	0

10.2. Докажите неравенство $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9$, если сумма положительных чисел x и y равна 1. **(7 баллов)**

Решение:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \Longrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2y^2}$ (так как $x + y = 1$).

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2y^2}$, откуда $\frac{2}{xy} = \frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$. (#)

Среднее арифметическое чисел x и y равно $\frac{1}{2}$. Не нарушая общности, положим $x \le \frac{1}{2} \le y$ (по свойству среднего арифметического). Значит: $x = \frac{1}{2} - a,\ y = \frac{1}{2} + a$, где $a \in [0; \frac{1}{2})$.

$$xy = \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} + a\right) = \frac{1}{4} - a^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \ge 4 \Rightarrow \frac{2}{xy} \ge 8 \Rightarrow \frac{2}{xy} + 1 \ge 9.$$

Делаем замену $\left(\frac{2}{xy}\right)$, используя (#).

$$\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + 1 \ge 9 \Rightarrow \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \ge 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \ge 9.$$

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи.	7
2. В решение присутствует, в том или ином виде идея, что переменные отличаются от ½ на одно и то же число и обосновано, что $\frac{1}{xy} \ge 4$.	4
3. В решение присутствует, в том или ином виде идея, что переменные отличаются от ½ на одно и то же число.	2
4. Определено, что $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{xy}$. Других продвижений нет. Выражение одной переменной через другую и получение неравенства $\frac{2-x}{x(1-x)^2} \ge 8$.	1
5. Неверное решение .	0

10.3. На столе лежит 2021 конфета. Три толстяка по очереди съедают либо одну, либо две, либо четыре конфеты до того момента, пока конфеты не кончатся. Могут ли второй и третий толстяки сговориться так, чтобы не дать первому толстяку съесть последнюю конфету? **(7 баллов)**

Первое решение:

1) Если первый толстяк съест 1 конфету первым ходом, то второй и третий съедят 4 и 1 конфету. Порядок не важен. Если первый толстяк съест 2 конфеты первым ходом, то второй и третий - по 2 конфеты. Если первый толстяк съест 4 конфеты первым ходом, то второй и третий - по 1 конфете. Таким образом, третий толстяк первым своим ходом всегда может оставить на столе 1995 конфет, количество, делящееся нацело на 5.

2) В дальнейшем, выбирая количество по таблице 1, второй и третий могут оставлять количество, которое всегда делится на 5, а первому придётся оставлять количество, которое не делится на 5. Таким образом, после некоторого хода, третий оставит либо 5, либо 10 конфет.

Таблица 1.

Первый	Второй	Третий	Сумма
1	2	2	5
2	2	1	5
4	4	2	10

Таблица 2.

Первый	Второй	Третий	Сумма
1	2	2	5
2	4	4	10
4	4	2	10

3) Если останется 10 конфет, то выбирая ходы по таблице 2, третий может либо оставить 5 конфет, либо съесть последнюю. Если первому останется 5 конфет, то, что ему смогут не оставить последнюю, вполне очевидно.

Ответ: Да, могут.

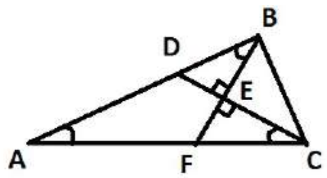
Второе решение:

Второй и третий толстяки всегда могут брать есть по 1 конфете, таким образом вместе с первым они могут съесть за три хода (по одному у каждого) не более, чем 6 конфет. Получается, третий всегда может оставить на некотором ходу от 5 до 10 конфет (6 последовательных чисел) на столе. Далее перебором можно проверить, что каждый из вариантов заканчивается тем, что второй или третий съедают последнюю конфету.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Обнаружено, что второй и третий могут сохранять делимость на 5, но не рассмотрено, что трое могут съесть 10 конфет, за три хода. Обнаружено, что, если третий оставит после себя от 5 до 10 конфет, у второго и третьего всё получится, но не приведены примеры завершающих ходов.	5
3. Обнаружено, что, если третий оставит после себя от 5 до 10 конфет, у второго и третьего всё получится, но не показано, как и почему второй и третий могут этого добиться.	3
4. Полностью рассмотрены ходы толстяков, если первому останется 5 конфет.	1
5. Неверное решение.	0

10.4. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки D и F соответственно так, что прямые DC и BF – перпендикулярны между собой и пересекаются в точке E внутри треугольника ABC. Оказалось, что $AD = DC$ и $DE \cdot EC = FE \cdot EB$. Какую градусную меру может иметь угол BAC? **(7 баллов)**

Решение:



$DE \cdot EC = FE \cdot EB \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{EB}{EC}$, $\angle DEB = \angle FEC = 90^o$, значит треугольники ΔDEB и ΔFEC – подобны. Из подобия получаем: $\angle DBE = \angle FCE = \alpha$. (Также это равенство углов можно обосновать тем, что четырёхугольник $DBCF$ – вписанный в окружность, из условия $DE \cdot EC = FE \cdot EB$)

ΔADC – равнобедренный $(AD = DC) \Rightarrow \angle DAC = \angle DCA(\angle FCE) = \angle DBE = \alpha$.

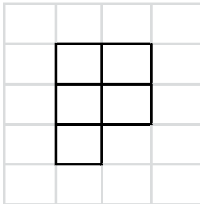
$\angle BDE$ – внешний для $\Delta ADC \Rightarrow \angle BDE = \angle DCA + \angle DAC = 2\alpha$.

$\angle DBE + \angle BDE = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 90^o$(сумма острых углов прямоугольного треугольника), откуда $\alpha = 30^o$.

Ответ: $\angle BAC = 30^o$.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Доказано, что $\angle DBE = \angle FCE$, без дальнейших продвижений.	4
Определено, что четырёхугольник $DBCF$ – вписанный в окружность.	2
Неверное решение.	0

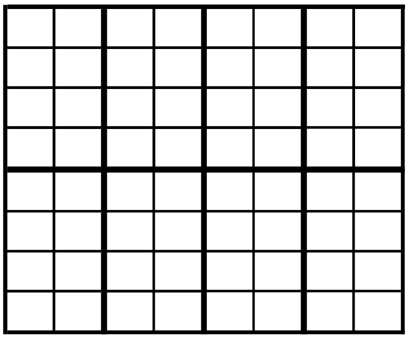
10.5. На поле для игры в морской бой размером 8x8 разместили фигуру «пятачок». Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка ранить одного «пятачка»? **(7 баллов)**



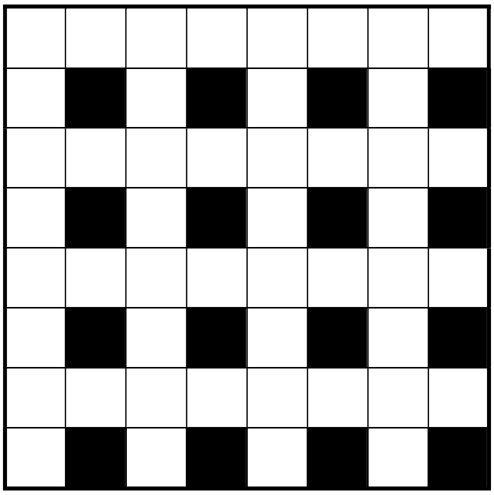
Решение:

Оценка:

Разделим доску на прямоугольники 4x2. Чтобы внутри одной такой фигуры не удалось разместить пятачка, нужно сделать не менее двух выстрелов. Фигур 8 штук, значит выстрелов потребуется не менее, чем $8 \cdot 2 = 16$.



Пример:



Ответ: 16 выстрелов.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Оценка через разделение на квадраты 2x2, без объяснения, что делать с пятой клеткой + верный ответ с примером.	6
Только оценка, без примера.	4
-Верный ответ с примером. -Только оценка через разделение на квадраты 2x2, без объяснения, что делать с пятой клеткой.	3
Только верный ответ, без оценки и примера.	0

Неверное решение.	0