Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

10 класс

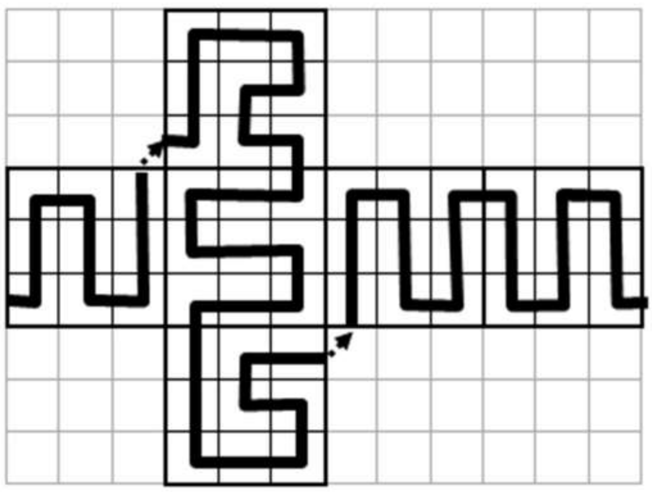
1. Из ряда натуральных чисел вычеркнули все числа, которые являются квадратами или кубами целых чисел. Какое из оставшихся чисел стоит на сотом месте?

Решение. Рассмотрим первую сотню натуральных чисел. Среди этих чисел десять квадратов (от 1 до $10^2 = 100$) и четыре куба (от 1 до $4^3 = 64$). Учтем, что два из этих чисел, а именно, 1 и 64 являются одновременно квадратами и кубами. Таким образом, из первой сотни вычеркнули 12 чисел. Среди следующих двенадцати чисел нет ни квадратов, ни кубов ($11^2 = 121$, $5^3 = 125$), следовательно, среди оставшихся чисел на сотом месте стоит число 112.

Ответ: 112.

2. Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?

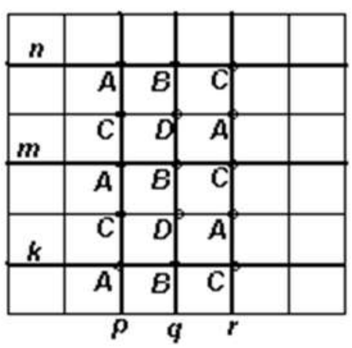
Решение. На рисунке показан пример такого пути.



Ответ: можно.

3. Каждый узел бесконечной сетки покрашен в один из четырёх цветов так, что вершины каждого квадрата со стороной 1 окрашены в разные цвета. Верно ли, что узлы одной из прямых сетки окрашены только в два цвета? (Сетка образована горизонтальными и вертикальными прямыми. Расстояние между соседними параллельными прямыми равно 1.)

Решение. Из условия следует, что на каждые два соседних узла – разного цвета. Рассмотрим какую-нибудь горизонтальную прямую m данной сетки. Если на ней чередуются узлы только двух цветов, то она и является искомой. Пусть это не так, и на прямой m находятся узлы более двух цветов, тогда в каком-то месте три узла разных цветов идут подряд. Обозначим эти цвета слева направо через A, B и C (см. рис.).



Над точкой цвета B (и под ней) может находиться только точка четвёртого цвета (обозначим его D), слева от которой должна быть точка цвета C, а справа – точка цвета A. Над точкой цвета D (и под ней) может находиться только точка цвета B, слева от нее – точка цвета A, а справа – точка цвета C. Таким образом, на горизонтальных прямых n и k повторилась раскраска трёх точек прямой m. Рассуждая аналогично, получим, что такая раскраска будет неограниченно повторяться как вверх, так и вниз. Значит, нашлись три вертикальные прямые (p, q и r), на которых бесконечно чередуются узлы двух цветов.

Ответ: верно.

4. Доказать, что уравнение $23x^2 - 92y^2 = 3128$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Сократив обе части на 23, получим $x^2 - 4y^2 = 136$. Значит, x чётно, тогда $x = 2z$. Тогда $z^2 - y^2 = 34$. Заметим, что переменные одной чётности. Но при этом левая часть делится на 4, а правая нет.

5. Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Оказалось, что сумма площадей двух противоположных (имеющих только общую вершину) треугольников равна сумме площадей двух других треугольников. Докажите, что одна из диагоналей делится другой диагональю пополам.

Решение 1. Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. $2S_{AOB} = AO \cdot OB \sin\angle AOB$. Запишем аналогичные равенства для площадей остальных трёх треугольников и заметим, что синусы всех четырёх углов с вершиной O равны. Поэтому условие задачи приводит к равенству $AO \cdot BO + CO \cdot DO = BO \cdot CO + AO \cdot DO$. Перепишем его в виде $(AO - CO)(BO - DO) = 0$. Если первая скобка равна 0, то O – середина диагонали AC, если вторая – диагонали BD.

Решение 2. Пусть середина K диагонали AC не совпадает с O. Площадь треугольника ABO отличается от площади треугольника CBO на $2S_{BOK}$ (поскольку $S_{ABK} = S_{CBK}$), а площадь треугольника CDO от площади треугольника ADO на $2S_{DOK}$. Поэтому указанное в условии равенство возможно только в случае $S_{BOK} = S_{DOK}$, то есть когда KO – медиана треугольника BKD.