Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

**2021-2022 уч.год**

10 класс

Решения и ответы

1. Имеется 20 яблок, каждые два яблока отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Докажите, что эти яблоки можно разделить на две кучки по 10 яблок так, чтобы эти кучки отличались по весу не более, чем на 40 грамм.

   *Решение.* Возьмем четыре яблока и расположим их веса в порядке неубывания $a \leq b \leq c \leq d$. Сделаем две кучки из двух яблок каждая, сгруппировав самое тяжелое с самым легким. По условию, верны два неравенства.

   $$0 \leq d - a \leq 40,$$
   $$0 \leq c - b \leq 40$$

   Умножим второе на $(-1)$ и сложим неравенства.

   $$0 \leq d - a \leq 40$$
   $$-40 \leq -(c - b) \leq 0$$

   $$-40 \leq (d - a) - (c - b) \leq 40$$

   Это доказывает, что кучки отличаются по весу не более, чем на 40 грамм (как в одну, так и в другую сторону).

   Теперь возьмем еще два яблока, их веса $e$ и $f$ снова расположим в порядке возрастания: $e \leq f$. Возьмем уже полученные кучки и упорядочим их по весу. Пусть их веса $X$, $Y$ и $X \leq Y$. Добавим к более тяжелой кучке $Y$ более легкое яблоко $e$, а к $X$ добавим $f$. Снова напишем два неравенства (первое из них мы доказали) и повторим оценку весов новых кучек.

   $$0 \leq Y - X \leq 40, \qquad 0 \leq Y - X \leq 40$$
   $$0 \leq f - e \leq 40 \qquad -40 \leq -(f - e) \leq 0$$

   $$-40 \leq (Y - X) - (f - e) \leq 40$$

   Новые кучки по три яблока снова отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Продолжив так еще семь раз, разделим яблоки на две кучки по 10 яблок.

   *Дополнение. Существуют разные способы сгруппировать яблоки в кучки, приводящие к верному решению.*

2. Докажите, что при всех вещественных $a, b, c, d$ выполняется неравенство

   $$(ab + 1)^2 + (cd + 1)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1$$

   *Решение.* Раскроем скобки.

   $$(ab + 1)^2 + (cd + 1)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

   $$(ab)^2 + 2ab + 1 + (cd)^2 + 2cd + 1 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

   Стремимся выделить квадрат суммы. Догадаемся прибавить и вычесть $2abcd$. Вычтем 1 слева и справа.

   $$(ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 + 2ab + 2cd - 2abcd + (ac)^2 + (bd)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

Выделяем квадрат суммы. Оставшиеся слагаемые позволяют сгруппировать их в еще один квадрат суммы и квадрат разности.

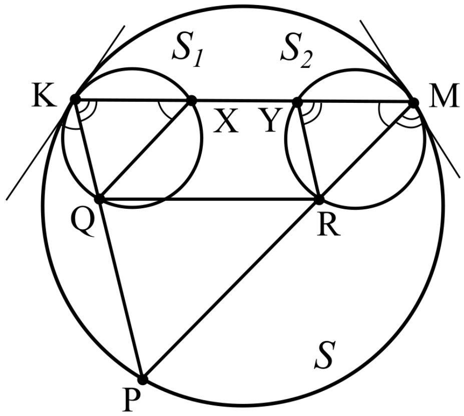
$$(ab+cd)^2 + 2(ab+cd) + 1 + (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(ab+cd+1)^2 + (ac-bd)^2 \geq 0$$

Получившееся неравенство является следствием двух верных неравенств $(ab+cd+1)^2 \geq 0$ и $(ac-bd)^2 \geq 0$.

3. Две равные окружности $S_1$ и $S_2$ касаются изнутри окружности $S$ в точках $K$ и $M$. Точка $P$ – произвольная точка окружности $S$. Точки $Q$ и $R$ – точки пересечения $KP$ и $MP$ с окружностями $S_1$ и $S_2$ соответственно. Докажите, что прямые $KM$ и $QR$ параллельны.

*Решение.*




Пусть $KM$ пересекает окружности $S_1$ и $S_2$ в точках $X$ и $Y$. Окружности $S$ и $S_1$ имеют общую касательную в точке $K$ (*Этот факт считается известным, его можно не доказывать.*) Применим теорему об угле между хордой и касательной к хордам $KQ$ и $KP$. На эти хорды в соответствующих окружностях опираются вписанные углы $\angle KXQ$ и $\angle KMP$, поэтому эти углы равны. Аналогично $\angle MYR = \angle MKP$. Отсюда треугольники $KQX$ и $MRY$ подобны, а так как у них равны радиусы описанных окружностей, то эти треугольники равны. Отрезки $KQ$ и $YR$ параллельны и равны, т.е. $KQRY$ – параллелограмм, что доказывает параллельность отрезков $KM$ и $QR$.

*Дополнение. Существуют решения, основанные на построении центральных углов и тройном использовании теоремы о величине вписанного угла.*

4. Как известно, из пяти различных чисел можно получить десять различных групп по три числа. Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что их суммы по три числа являются десятью последовательными числами?

*Решение.* Обозначим пять чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Для удобства выпишем все десять сумм.

$$\begin{array}{ccccc} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_4 & x_1+x_2+x_5 & x_1+x_3+x_4 & x_1+x_3+x_5 \\ x_1+x_4+x_5 & x_2+x_3+x_4 & x_2+x_3+x_5 & x_2+x_4+x_5 & x_3+x_4+x_5 \end{array}$$

Рассмотрим четность всех десяти сумм.

Если все числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ четны или все нечетны, то суммы или все четны, или все нечетны.

Если среди этих пяти чисел одно четное, например, $x_1$, то получим шесть четных сумм и четыре нечетные.

Если среди этих пяти чисел два четных, например, $x_1$ и $x_2$, то получим шесть четных сумм и четыре нечетные.

Если среди этих пяти чисел три четных, например, $x_1, x_2$ и $x_3$, то получим четыре четные суммы и шесть нечетных.

Если среди этих пяти чисел четыре четных, например, $x_1, x_2 x_3$ и $x_4$, то получим четыре четные суммы и шесть нечетных.

Во всех случаях число нечетных сумм не равно числу нечетных, а десять последовательных чисел – это пять четных и пять нечетных, поэтому такие пять чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ найти невозможно.

*Дополнение. Существует другое решение, основанное на построении различных упорядоченных по возрастанию сумм. Противоречие получается в том, что пять упорядоченных чисел дают десять упорядоченных сумм, отличающихся друг от друга на единицу, и их порядок противоречит первоначальному порядку чисел. Из-за большого числа необходимых преобразований, это решение не приводится.*

*Ответ.* Таких чисел не существует.

5. Даны две функции (*все переменные и коэффициенты – вещественные*)

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad g(x) = x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Известно, что равенство $f(x) = g(x)$ не выполняется ни при каких значениях $x$. Докажите, что равенство $f(x+1) = g(x-1)$ выполняется хотя бы при одном значении переменной $x$.

*Решение.* Равенство $f(x) = g(x)$ переписывается как

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
$$(a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

Если $a_3 \neq b_3$, то это – уравнение третьей степени, и оно имеет хотя бы одно решение. Так как сказано, что решений нет, то или $a_3 = b_3$ и уравнение является уравнением второй степени с отрицательным дискриминантом, или все коэффициенты перед степенями $x$ равны 0, при этом $a_0 \neq b_0$. В любом случае, $a_3 = b_3$.

Для $f(x+1)$ и $g(x-1)$ получаем следующие выражения.

$$f(x+1) = (x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 = x^4 + (a_3+4)x^3 + \ldots + a_0$$

$$g(x-1) = (x-1)^4 + b_3(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + b_1(x-1) + b_0 = x^4 + (b_3-4)x^3 + \ldots + b_0$$

Здесь точки заменяют слагаемые, не содержащие третьи степени $x$.

Равенство $f(x+1) = g(x-1)$ можно переписать как

$$x^4 + (a_3+4)x^3 + \ldots + a_0 = x^4 + (b_3-4)x^3 + \ldots + b_0$$

С учетом $a_3 = b_3$ получаем

$$8x^3 + \ldots = 0$$

Получили уравнение третьей степени, оно имеет хотя бы одно решение.

Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

**2021-2022 уч.год**

10 класс

Критерии проверки

Задача 1

| Балл | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Полностью верное решение. |
| 5 | Верное решение, недостаточно обоснованное. Имеется переход от оценок разностей весов отдельных яблок к оценкам разности весов кучек. Указано, что при добавлении новой пары яблок веса кучек необходимо упорядочить (действуем с кучками как с яблоками). |
| 3 | Верное решение, недостаточно обоснованное. Имеется переход от оценок разностей весов отдельных яблок к оценкам разности весов кучек. При добавлении следующей пары яблок веса кучек не упорядочиваются. |
| 1 | Частично верное решение, неверные действия с двойными неравенствами, остальное верно. |
| 0 | Неверное решение. |

Задача 2

| Балл | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Полностью верное решение. Неравенство доказано. (Доказательство того факта, что сумма двух квадаратов неотрицательна, не требуется.) |
| 1 | Выделен один квадрат разности. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно. |
| 0 | Неверное решение. |

Задача 3

| Балл | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Полностью верное решение. |
| 5 | Верное решение, имеющее незначительные недочеты в обосновании. |
| 3 | Доказательство не закончено. Написаны равенства вписанных углов, из которых следует параллельность $KM$ и линии центров вписанных окружностей. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно. |
| 0 | Неверное решение. |

Задача 4

| Балл | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Полностью верное решение. |
| 5 | Верное решение, недостаточно обоснованное. Возможно, пропущены отдельные этапы рассуждений, основанных на четности–нечетности и(или) проведен неполный перебор всех случаев. |
| 1 | Сформулирован реализуемый план доказательства. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно. |
| 0 | Неверное решение. |

Задача 5

| Балл | За что ставится |
|---|---|
| 7 | Полностью верное решение. |
| 5 | В целом верное решение, содержащее незначительные логические пропуски. |
| 4 | В целом верное решение. Ошибки в работе с коэффициентами и(или) степенями переменной. |
| 3 | Получено равенство коэффициентов при третьих степенях. Дальнейшее продвижение отсутствует или неверно. |
| 1 | Указано, что в общем случае уравнение третьей степени имеет решение, значит, равенство заданных функций приводит к уравнению второй степени (или ниже). |
| 0 | Неверное решение. |