

**Задания для обучающихся**

**Время выполнения – 235 минут**  
**Максимальное количество баллов – 42**

*Написать только ответ — мало!*

*Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!*

1. Для трех чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется равенство  $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$ . Найдите значение выражения  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b}$ .

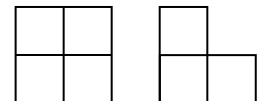
2. Приведите пример 2021 последовательных чисел, среди которых встречается ровно 30 точных квадратов.

3. В трапецию  $ABCD$  с основаниями  $BC = 3$  и  $AD = 5$  можно как вписать окружность, так и описать окружность около нее. Вписанная окружность с центром  $O$  касается боковых сторон  $AB$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите площадь пятиугольника  $BCFOE$ .

4. Почтальон Печкин едет по шоссе на велосипеде. Он заметил, что через каждые 4,5 километра его обгоняет дачный автобус, а через каждые 9 минут проезжает встречный дачный автобус. Интервал движения автобусов в обоих направлениях равен 12 минутам. С какой скоростью едет Печкин?

5. Правильный 2021-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди всех получившихся треугольников ровно один остроугольный.

6. Прямоугольник  $7 \times 11$  разрезали на квадраты  $2 \times 2$  и на уголки из трех клеток как на рисунке. Сколько всего фигур каждого вида могло получиться при разрезании? Найдите все варианты.



**РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ**

1. **Ответ:** 4.

**Решение:** Рассмотрим разность

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} - \left( \frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} \right) = \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} = 3. \text{ Значит, искомое}$$

выражение равно 4.

**Критерии проверки:** Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. **Решение:** Среди чисел 400, 401, ..., 2420 встречается ровно 30 точных квадратов чисел от  $20^2 = 400$  до  $49^2 = 2401$ . Имеются и другие примеры 2021 последовательных натуральных чисел.

**Критерии проверки:** Приведен верный пример с проверкой, что он подходит – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

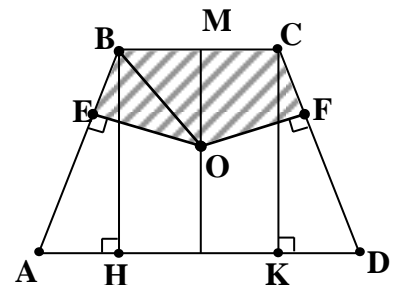
3. **Ответ:**  $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ .

**Решение:** Так как в трапецию можно вписать окружность, то  $AB+CD = BC+AD = 8$ . Из того, что окружность можно описать, следует равнобедренность трапеции, значит  $AB = CD = 4$ . Проведем высоты  $BH$  и  $CK$ , тогда  $AH=KD=1$ . Из треугольника  $ABH$  находим катет  $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{15}$ , это высота трапеции и диаметр вписанной окружности. Значит, радиус вписанной окружности равен

$r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ . Радиусы  $OE, OM, OF$  перпендикулярны соответствующим сторонам трапеции (см. рисунок). Треугольники  $BOE$  и  $BMO$  равны по гипотенузе и катету, аналогично треугольники  $COM$  и  $CFO$ . Кроме того, равны треугольники  $BMO$  и  $MCO$  по общему катету и острому углу ( $BO$  и  $CO$  – биссектрисы равных углов трапеции). Таким образом, площадь пятиугольника  $BCFOE$  равна

$$4S_{BMO} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

**Критерии проверки:** Верное решение – **7 баллов**, решение в целом верное, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**, найден радиус вписанной окружности – **1 балл**, в остальных случаях – **0 баллов**.



4. **Ответ:** 15 км/ч.

**Решение:** Пусть  $x$  км/ч и  $y$  км/ч – скорости движения велосипеда и автобуса, соответственно. Так как интервал движения автобусов составляет 12 мин =  $1/5$  ч, то расстояние между двумя идущими подряд автобусами составляет  $y/5$  км. Следовательно, в момент встречи Печкина с автобусом расстояние между велосипедом и следующим встречным автобусом составляет  $y/5$  км. А поскольку их встреча произойдет через 9 мин =  $3/20$  ч и скорость сближения равна  $x + y$ , то получаем уравнение:  $\frac{3}{20}(x + y) = \frac{y}{5}$ . Далее, время между двумя последовательными обгонами автобуса равно  $4,5/x$ . С другой стороны, заметим, что оно же равно  $1/5 + 4,5/y$ . Это дает второе уравнение. Решая систему, находим единственное решение  $x = 15$  км/ч.

**Критерии проверки:** Верное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**, система составлена, но дальнейшее решение не закончено или неверно – **3 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

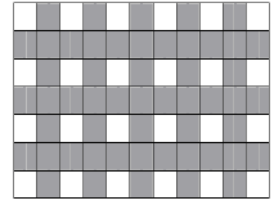
5. **Решение:** Для начала заметим, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит внутри этого треугольника, то треугольник – остроугольный. Действительно, в противном случае нашелся бы угол треугольника, опирающийся на дугу больше или равную половине всей окружности, а это невозможно в силу свойства вписанного угла. Аналогично можно показать, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне треугольника, то треугольник – тупоугольный. Далее рассмотрим окружность с центром в точке  $O$ , описанную около данного правильного 2021-угольника. Заметим, что никакая его диагональ не может проходить через точку  $O$ , так как иначе она была бы диаметром окружности и осью симметрии многоугольника, что противоречит нечетному количеству вершин. Тогда в заданном разбиении имеется ровно один треугольник, внутри которого находится точка  $O$ . Именно он и является остроугольным, все остальные – тупоугольные.

**Критерии проверки:** Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

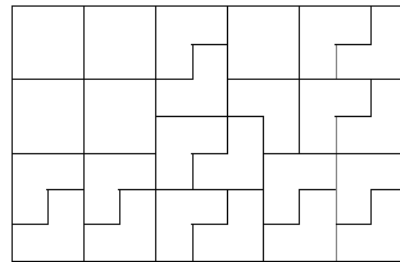
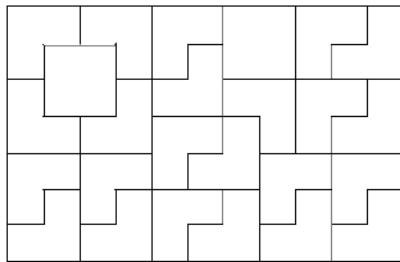
6. **Ответ:** 2 квадрата и 23 уголка, либо 5 квадратов и 19 уголков.

**Решение:** Пусть  $x$  и  $y$  – соответственно количество квадратов и уголков. Тогда  $4x + 3y = 77$ .

Раскрасим прямоугольник как показано на рисунке: 24 белых клеток и остальные – черные. Заметим, что при любом разрезании каждый квадрат  $2 \times 2$  содержит ровно одну белую клетку, а каждый уголок – либо ровно 1, либо ни одной. Это означает, что должно выполняться неравенство  $x + y \geq 24$ .



Рассмотрим первое равенство:  $4x + 3y = x + 3(x + y) = 77$ . Видно, что  $x$  имеет остаток 2 при делении на 3. Кроме того,  $3(x + y) \geq 72$ , значит  $x \leq 5$ . Возможны только варианты  $x = 2$  или  $x = 5$ . Оба случая можно получить, примеры разрезов показаны на рисунках. В итоге имеем: 2 квадрата и 23 уголка, либо 5 квадратов и 19 уголков.



**Критерии проверки:** Верное решение – **7 баллов**, обосновано возможное количество фигур каждого вида, но примеры отсутствуют – **4 балла**, приведены только примеры разрезов – **2 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.