10 класс

1. Три пчёлки собирают нектар с 88 садовых цветов. На каждый цветок обязательно прилетала хотя бы одна пчела. Каждая из пчёл посетила ровно 54 цветка. Назовём цветок сладким, если его посетили все три пчелы, и горьким, если ровно одна. Каких цветов из этих 88 больше: сладких или горьких, и на сколько?

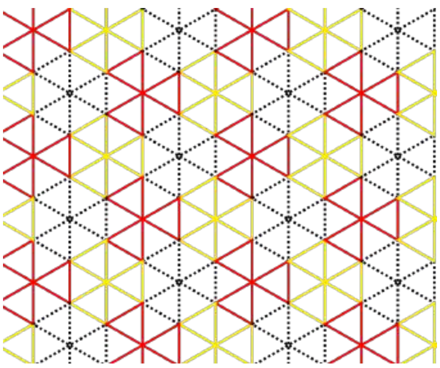
   Решение. Пусть среди данных 88 садовых цветков s сладких и g горьких. Тогда цветков, на которые прилетали две пчелы, ровно $88 - s - g$. Общее число прилётов пчёл на цветы, с одной стороны, равно $3 \cdot 54 = 162$ (каждая пчела посетила 54 цветка), с другой, равно $3s + 2(88 - s - g) + g = s - g + 176$. Имеем уравнение $162 = s - g + 176$, откуда $s - g = -14$. Это значит, что горьких цветков больше на 14. **Ответ:** горьких цветков на 14 больше.

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющих условию: НОК$(a, b)+$ НОД$(a, b) = ab/5$ и докажите, что других таких пар нет.

   Решение. Воспользуемся формулой НОК$(a, b) \cdot$ НОД$(a, b) = ab$, а также тем, что наименьшее общее кратное чисел делится на их наибольший общий делитель. Пусть, для краткости, НОД$(a, b) = x$, НОК$(a, b) = kx$ (здесь k — некоторое натуральное число), тогда $ab = kx^2$. Уравнение при этом принимает вид $x + kx = \frac{kx^2}{5}$, откуда $x = 5 + \frac{5}{k}$. Учитывая, что числа x и k – натуральные, делаем вывод, что число k – делитель числа 5, поэтому либо $k = 1$, либо $k = 5$. В первом случае НОД$(a, b) =$ НОК$(a, b) = 10$, то есть, числа a и b равны 10. Во втором случае НОД$(a, b) = 6$, а НОК$(a, b) = 30$, поэтому a, b – делители числа 30, делящиеся на 6, то есть, или 30, или 6. Но их произведение равно 180. Следовательно, одно из них равно 30, а другое равно 6. **Ответ:** три пары: (6, 30), (10, 10) и (30, 6).

3. Бесконечная решётка составлена из правильных треугольников со стороной 1 см. Каждое ребро решётки покрашено в один из трёх цветов. Верно ли, что обязательно найдётся вершина, из которой улитка может проползти по одноцветным рёбрам 100 см не проходя дважды одно ребро?

   Решение. Не верно. Один из возможных контрпримеров показан на рисунке. Он опирается на замощение плоскости шестиугольниками, которое можно построить на базе треугольной сетки. К подобной идее можно прийти отталкиваясь от раскраски шахматной доски, к которой добавлены небольшие области третьего цвета, расположенные в узлах и обеспечивающие полное отделение областей первых двух цветов.

4. Числовая последовательность задана соотношением: $a_0 = 1$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$. Докажите, что $a_{2021} > 60$.

Решение. Исходя из соотношений в условии, все a_k положительны. Возведём рекуррентное равенство в квадрат, получим оценку

$$a_{k+1}^2 = \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2 = a_k^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2} > a_k^2 + 2.$$

Применим далее это неравенство несколько раз в правой части:

$$a_{k+1}^2 > a_k^2 + 2 > a_{k-1}^2 + 4 > ... > a_0^2 + 2(k+1).$$

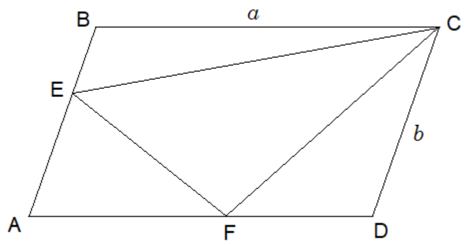
Значит, $a_{2021}^2 > 1 + 2 \cdot 2021 = 4043$, откуда $a_{2021} > \sqrt{4043} > 60$.

5. Найдите площадь треугольника, вписанного в параллелограмм, если известно, что остальная часть параллелограмма представляет собой три треугольника единичной площади.

Решение. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Вписать в него треугольник так, чтобы остальная часть параллелограмма представляла собой три треугольника, можно единственным способом: поместив одну из вершин треугольника в вершину параллелограмма (для примера, в C), а две другие вершины – на стороны, прилежащие к вершине A (см. рис.). Обозначим эти вершины буквами F и E (F лежит на стороне AD). Пусть также $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, $\angle ABC = \alpha$. Тогда $S_{CFD} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot b \cdot \sin\alpha$, откуда $DF = \frac{2}{b\sin\alpha}$ и $AF = a - \frac{2}{b\sin\alpha}$. Аналогично $AE = b - \frac{2}{a\sin\alpha}$. Наконец,

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{(ab\sin\alpha - 2)^2}{2ab\sin^2\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{(S-2)^2}{2S} = 1,$$

где $S = ab\sin\alpha$ – площадь параллелограмма $ABCD$. Получили квадратное уравнение $2S = (S-2)^2$, решив которое, находим, что $S = 3 \pm \sqrt{5}$. Но $S > 3$, поэтому $S_{CEF} = \sqrt{5}$.



Ответ: $\sqrt{5}$.