Решения задач 10 класса (1-й вариант).

1. Витя Перестукин при опросах всегда неправильно считает проценты: он делит количество ответивших определенным образом на количество всех остальных. Например, при опросе «Как тебя зовут?», проведенном среди 7 Ань, 9 Оль, 8 Юль, Витя насчитал 50 % Юль.

Витя провёл в своей школе опрос: каким является треугольник со сторонами 3, 4, 5? По его подсчётам, по 5 % ответили «остроугольным», «тупоугольным» и «такого треугольника не бывает», 50 % — «прямоугольный», остальные a % — «смотря в какой геометрии». Чему равно a?

Ответ: $a = 110$ (во 2-м варианте $a = 104$). Когда Витя считает, что какая-то часть учеников составляет 5% от всего класса, то на самом деле она составляет $5/100 = 1/20$ от количества остальных учеников, $1/21$ от всего класса. Аналогично, Витины 50% — это треть класса. Значит, все, ответившие первыми четырьмя способами, составляют долю $1/21 + 1/21 + 1/21 + 1/3 = 10/21$ от всего класса. Значит, оставшиеся ученики составляют $11/10$ от всех, кроме них, то есть, по Витиному мнению, 110%.

2. Пусть $f(x) = 2x^2 + ax + b$ — квадратный трехчлен, причем число a не целое. Докажите, что ровно одно из уравнений $f(x) = f(\lceil x \rceil)$, $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ имеет нецелый корень.

Рассмотрим эти уравнения на интервале между двумя последовательными целыми числами $(n, n+1)$. Предположим, что $f(x)$ монотонен на этом интервале (то есть, вершина графика лежит за его пределами). Тогда уравнения принимают вид $f(x) = f(n)$ и $f(x) = f(n+1)$ и не имеют решений на этом интервале.

Осталось изучить интервал $(n, n+1)$, в который попадает абсцисса вершины x_0 параболы. На нём значения $f(x)$ убывают от $f(n)$ до $f(x_0)$, а потом возрастают от $f(x_0)$ до $f(n+1)$. Заметим, что при $f(n) = f(n+1)$ координата $x_0 = -a/4$ находится в точке $n + 1/2$; но тогда $a = -4n - 2$ — целое число, что запрещено условием. Поэтому $f(n)$ и $f(n+1)$ различны. Если $f(n) < f(n+1)$, то на этом интервале $f(x)$ не принимает значение $f(n+1)$, но принимает значение $f(n)$; если же $f(n) > f(n+1)$, то наоборот. Таким образом, ровно одно из данных уравнений имеет (и причем ровно один) нецелый корень.

3. На полуокружности с диаметром AB выбраны точки C и D так, что хорды AD и BC пересекаются. Известно, что $BC = 1$, $AD = 2$. Докажите, что $\angle ABC > 2\angle BAD$.

Поскольку у окружности есть хорда длины 2, то её диаметр больше 2. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC меньше половины гипотенузы, поэтому $\angle ABC > 60$, $\angle BAC < 30$. Из последнего следует, что $\angle BAD < 30^\circ$. Таким образом, $\angle BAC > 60^\circ > 2\angle BAD$.

4. Назовем число *антитреугольным*, если его можно записать в виде $\frac{2}{n(n+1)}$ для некоторого натурального n. Для какого количества чисел k ($1000 \leqslant k \leqslant 2000$) число 1 можно записать в виде суммы k антитреугольных чисел (не обязательно различных)?

Ответ: все 1001 возможных значений k подходят.

Заметим, что $1/3 = 2/2 \cdot 3$ и $1/6 = 2/3 \cdot 4$ являются антитреугольными числами. Поэтому единицу можно записать в виде суммы трех, четырех и пяти таких чисел: $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1/6 + 1/6 + 1/3 + 1/3 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/3$. Докажем, что количества слагаемых в записи можно увеличивать на 3 — из этого будет следовать, что все $k \geqslant 3$ подходят. В самом деле,

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 4\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = 4\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2n+2}\right) =$$
$$= 4\left(\frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \frac{2}{2n(2n+1)} + \frac{2}{2n(2n+1)} + \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{2}{(2n+1)(2n+2)},$$

т.е. одно антитреугольное число можно заменить на сумму четырех других, тем самым увеличив количество слагаемых на три.

5. В школе 505 учеников. Каждый ученик посещает ровно одну из восьми спортивных секций, ровно один из восьми научных кружков и ровно одну из восьми студий художественной самодеятельности. Два ученика дружат, если они посещают вместе *ровно два* разных занятия (а иначе не дружат). Докажите, что найдутся 64 ученика, никакие двое из которых не дружат.

Пронумеруем секции номерами от 1 до 8, так же пронумеруем кружки и студии. Каждый школьник знает три числа от 1 до 8 — номер своей секции, своего кружка и своей студии. Пусть каждый школьник посчитает сумму своих трёх номеров и вычислит её остаток от деления на 8. Заметим, что какой-то из восьми остатков получился как минимум у 64 учеников (ибо $63 \cdot 8 = 504 < 505$). Но если два ученика дружат, то два слагаемых у них одинаковые, а третьи слагаемые различны, поэтому остатки сумм у них будут разными. Следовательно, все ученики с одним и тем же остатком попарно не дружат.