Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2021 – 2022 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году

10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *Различные положительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам*

$$xyz = 1 \quad \text{и} \quad x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Найдите среднее из них. Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Рассмотрим многочлен $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$. Числа x, y, z — его корни. Раскрывая скобки, или используя теорему Виета для кубических многочленов, получим $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$, где $a = -(x + y + z)$, $b = xy + xz + yz$, $c = -xyz$. Условие задачи показывает, что $a = -b$ и $c = -1$. Тогда имеем $P(t) = t^3 - bt^2 + bt - 1 = (t - 1)(t^2 - bt + 1)$. Значит, один из корней многочлена $P(t)$ равен 1, а два других — суть корни квадратного трёхчлена $t^2 - bt + 1$. По теореме Виета, они в произведении дают 1. Так как оба они являются положительными числами, один из них больше 1, а другой — меньше 1.

Способ 2. Выразим из первого уравнения z и подставим во второе: $z = \dfrac{1}{xy}$, и тогда

$$x + y + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy,$$

$$x^2y + xy^2 + 1 = y + x + x^2y^2,$$

$$x^2(y - y^2) + x(y^2 - 1) + 1 - y = 0,$$

$$(1 - y)(x^2y - xy - x + 1) = 0,$$

$$(1 - y)(x - 1)(xy - 1) = 0.$$

Значит, либо $x = 1$, либо $y = 1$, либо $xy = 1 \Leftrightarrow z = 1$. При любом из этих вариантов произведение двух других чисел равно 1, как следует из первого условия. Так как числа различны и положительны, одно из них меньше 1, второе равно 1, а третье больше 1.

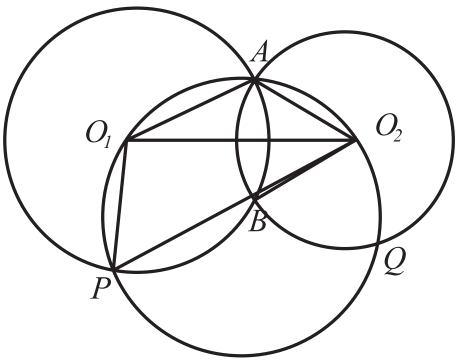
Ответ: 1.

Примечание: Ссылка на теорему Виета принимается без доказательства.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное и обоснованный ответ	7 баллов
Задача сведена к поиску корней кубического уравнения	2 балла
Задача сведена к уравнению с двумя переменными	1 балл
Приведён пример чисел, удовлетворяющих условиям задачи	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10.2. *Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, при этом $O_1O_2 > O_1A > O_2B$. Пусть P и Q — точки пересечения окружности, описанной около треугольника O_1AO_2 с первой и второй окружностями соответственно. Докажите, что отрезки O_1Q и O_2P пересекаются в точке B.*



К решению задачи 10.2

Решение: Условие $O_1O_2 > O_1A > O_2B$ означает, что точки O_1 и O_2 не могут лежать внутри второй и первой окружностей соответственно. Значит, их расположение такое, как указано на рисунке. Покажем, что прямая O_2P проходит через точку B (то, что прямая O_1Q проходит через точку B доказывается аналогично). Сравним углы O_1O_2B и O_1O_2P (на рисунке первый из них больше, но это — результат умышленно искажённого чертежа). Во-первых, заметим, что поскольку прямая O_1O_2 — линия центров пересекающихся окружностей, треугольники O_1AO_2 и O_1BO_2 симметричны друг другу относительно этой прямой. Значит, эти треугольники равны, а поэтому $\angle O_1O_2B = \angle O_1O_2A$. Теперь рассмотрим окружность, описанную около треугольника AO_1O_2. По условию она проходит через точку P. Так как хорды той окружности O_1P и O_1A являются радиусами первой окружности, то они равны; следовательно, равны и стягиваемые ими дуги. Тогда $\angle O_1O_2A = \angle O_1O_2P$, как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Имеем $\angle O_1O_2B = \angle O_1O_2A = \angle O_1O_2P$, а это означает совпадение лучей O_2B и O_2P. Доказательство завершено.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Задача решена при конкретном соотношении радиусов окружностей	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10.3. *Группа детского сада в количестве 25 детей вернулась с прогулки. Для просушки дети выложили на батарею в ряд все свои 50 варежек. Воспитательница группы заметила, что варежки каждого ребёнка лежат не рядом. Более того, оказалось, что между варежками любого ребёнка лежит простое число варежек других детей. Докажите, что найдётся ребёнок, между варежками которого лежат ровно две другие варежки.*

Решение:

Способ 1. Предположим противное, то есть пусть между варежками каждого ребёнка лежит простое число других варежек, большее двух. Занумеруем числами от 1 до 50 варежки в порядке их расположения на батарее (слева направо). Тогда общая сумма номеров варежек равна $1 + 2 + \ldots + 50$ — число нечётное, так как в этой сумме нечётное количество нечётных слагаемых. С другой стороны, если у какого-то ребёнка меньший номер варежки a, то больший номер варежки равен $a + p + 1$, где $p > 2$ и p — простое. Тогда сумма номеров его варежек равна $2a + p + 1$ — число чётное. Итак, сумма номеров варежек каждого ребёнка чётна, а общая сумма нечётна — противоречие.

Способ 2. Представим себе, что батарея греет неравномерно, поэтому в какой-то момент некоторый варежки уже просохли, а некоторые — нет, и пусть сухие варежки лежат через одну и мокрые варежки лежат через одну. Тогда на батарее 25 сухих и 25 мокрых варежек. Число 25 — нечётное, поэтому у какого-то ребёнка одна варежка мокрая (пусть она лежит левее), вторая — сухая. Тогда между его варежками лежит несколько пар варежек типа «сухая — мокрая», то есть чётное количество других варежек. Это число простое по условию. Но единственное простое чётное число — это число 2.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Есть идея (при неверном решении) использовать чётность номеров варежек	2 балла
Рассмотрены частные случаи расположения варежек на батарее	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10.4. *График квадратного трёхчлена*

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$$

пересекает положительную полуось оси Oy в точке M, а положительную полуось оси Ox — в точках K и L (точка L расположена правее точки K). Оказалось, что $\angle LKM = 120°$, а $KL = KM$. Найдите корни данного трёхчлена.

Решение: Рассмотрим треугольник KOM (O — начало координат). Он прямоугольный, и его угол K, будучи смежным с углом LKM, равен $60°$. Тогда $OM = OK \cdot \sqrt{3}$ и $KL = KM = 2OK$. Пусть абсцисса точки K равна $t > 0$. Тогда абсцисса точки L равна $3t$. Числа t и $3t$ — корни данного трёхчлена, поэтому он имеет вид $y = a(x-t)(x-3t)$. По условию его старший коэффициент равен $2/\sqrt{3}$; это и есть число a. Кроме того, его график проходит через точку $M(0;\, t\sqrt{3})$. Это означает, что выполнено равенство

$$t\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (0-t)(0-3t) \Leftrightarrow 3t = 6t^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2},$$

так как $t \neq 0$. Значит, корни трёхчлена равны $t = 0{,}5$ и $3t = 1{,}5$.

Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верно найдено отношение корней квадратного трёхчлена, сами корни не найдены	2 балла
Верный ответ и пример многочлена, на котором он реализуется. Отсутствие других ответов не доказано	1 балл
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10.5. *Профессор Потапов меняет шило на мыло, академик Агатов* 4 *мыла на* 1 *шило, а доцент Долматов* 1 *мыло на* 5 *шильев (но не наоборот). После нескольких обменов у студента Сидорова оказалось столько же шильев и мыла, сколько было в начале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на* 26.

Решение: Пусть студент Сидоров осуществил p обменов с профессором, a — с академиком и d — с доцентом. Тогда он отдал им p мыла и $a + 5d$ шильев, а получил от них p шильев и $4a + d$ мыла. По условию количество отданного и полученного мыла одинаково; это же справедливо и для шильев. Имеем систему

$$\begin{cases} p &= & 4a + d, \\ p &= & a + 5d. \end{cases}$$

Отсюда $4a+d = a+5d \Leftrightarrow 3a = 4d$. Так как числа a и d — целые, число a кратно 4 (а число d кратно 3). То есть $a = 4t$, $d = 3t$ для некоторого целого числа t. Теперь из любого уравнения системы получаем, что $p = 19t$. Общее число обменов равно $a+p+d = 4t+3t+19t = 26t$, то есть оно кратно 26, что и требовалось доказать.

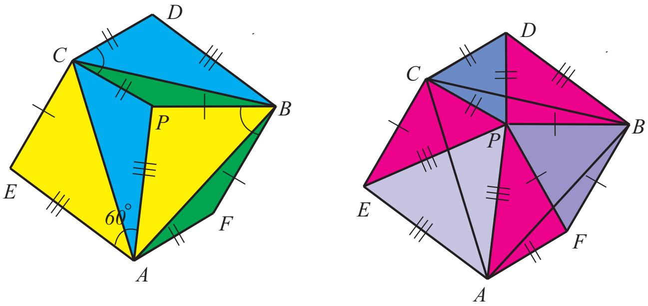
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Выписана система уравнений, верно описывающая условия задачи	1 балл
Приведены частные случаи обменов мыла и шильев	0 баллов
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов

10.6. *В равностороннем треугольнике ABC выбрана точка P таким образом, что $AP = 10$, $BP = 8$, $CP = 6$. Найдите площадь этого треугольника.*

Решение:

Способ 1. Повернём треугольник APB на $60°$ вокруг точки A, треугольник BPC на $60°$ вокруг точки B, а треугольник CPA на $60°$ вокруг точки C (все повороты против часовой стрелки) — см. рис. слева.



К решению задачи 10.6, способ 1

Мы получили шестиугольник $AFBDCE$, площадь которого вдвое больше площади треугольника ABC. Разрежем этот шестиугольник иначе: на треугольники APF, FPB, BPD, DPC, CPE и EPA — рис. справа. Треугольники CPD, BPF и APE — равнобедренные с углом $60°$, то есть они равносторонние. Тогда треугольники CPE, BPD и APF равны по трём сторонам. При этом стороны каждого из них равны 6, 8 и 10. Таким образом, эти треугольники прямоугольные, и площадь каждого из них равна 24. Окончательно имеем

$$S_{ABC} = \frac{3 \cdot 24 + 9\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 25\sqrt{3}}{2} = 36 + 25\sqrt{3}.$$

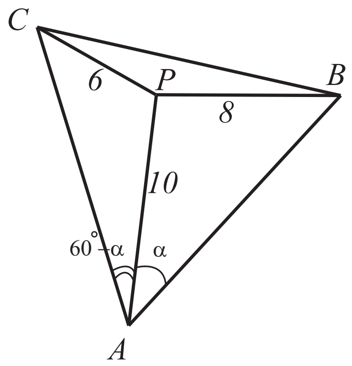
Способ 2. Обозначим угол PAB через α. Тогда $\angle PAC = 60° - \alpha$. Записав теоремы косинусов для треугольников CAP и PAB, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 36 &= 100 + a^2 - 20a\cos(60° - \alpha), \\ 64 &= 100 + a^2 - 20a\cos\alpha. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим, что

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + 36}{20a}.$$

Тогда первое уравнение системы преобразуется таким образом:



К решению задачи 10.6, способ 2

$$36 = 100 + a^2 - 20a\cos(60^\circ - \alpha),$$
$$0 = 64 + a^2 - 20a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right),$$
$$0 = 64 + a^2 - \frac{1}{2}(a^2+36) - 10a\sqrt{3}\sin\alpha,$$
$$20a\sqrt{3}\sin\alpha = 92 + a^2,$$
$$\sin\alpha = \frac{92+a^2}{20a\sqrt{3}}.$$

Согласно основному тригонометрическому тождеству имеем:

$$\frac{(a^2+36)^2}{400a^2} + \frac{(92+a^2)^2}{1200a^2} = 1,$$
$$3(a^4 + 72a^2 + 1296) + (a^4 + 184a^2 + 8464) = 1200a^2,$$
$$4a^4 - 800a^2 + 12352 = 0,$$
$$a^4 - 200a^2 + 3088 = 0,$$
$$a^4 - 200a^2 + 10000 = 10000 - 3088 = 6912,$$
$$(a^2-100)^2 = 2^8\cdot 3^3,$$
$$a^2 = 100 \pm 48\sqrt{3}.$$

Так как $\angle APB > \angle ACB$, в треугольнике APB сторона AB наибольшая и $a > 5$. Тогда $a^2 > 25$ и значение $a^2 = 100 - 48\sqrt{3}$ недопустимо. Поэтому $a^2 = 100 + 48\sqrt{3}$. Тогда $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} + 36$.

Способ 3. Применим метод координат, обозначив сторону равностороннего треугольника через a, считая, что точки A, B и C имеют следующие координаты:

$$A\left(-\frac{a}{2};0\right),\quad B\left(\frac{a}{2};0\right),\quad C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Пусть точка P имеет координаты $P(x;y)$. В силу условия имеем систему их трех уравнений (из которых затем будем исключать неизвестные x, y):

$$\begin{cases} (x-0)^2 + \left(y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 36, \\ \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = 100, \\ \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = 64. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения третье, а затем из второго уравнения первое, получим, что

$$ax = 18,\ ay\sqrt{3} = 46 + \frac{a^2}{2}.$$

Подставляя значения $x,\ y$ из этих равенств в первое уравнение, выводим квадратное уравнение относительно числа a^2:

$$a^4 - 200a^2 + 3088 = 0.$$

Поскольку по условию задачи $a > 10$ (точка P внутри треугольника ABC), то

$$a^2 = 100 + \sqrt{6912} = 100 + 48\sqrt{3}.$$

Поэтому площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36 + 25\sqrt{3}.$$

Ответ: $36 + 25\sqrt{3}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Верно найдена сторона треугольника ABC	5 баллов
Верно найден косинус одного из углов ABP, BPC, CPA	2 балла
Неверное решение или его отсутствие	0 баллов