# 10 класс

**1.** В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

**Ответ:** *поровну.*

**Решение.** Пусть в школе учатся $m$ мальчиков и $d$ девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна $M$, а сумма возрастов всех девочек равна $D$. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m}+\frac{D}{d}=2\cdot\frac{M+D}{m+d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm)=0$. Поскольку $\frac{M}{m}\neq\frac{D}{d}$, то есть $Md\neq Dm$, заключаем, что $m=d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d-m)(Md-Dm)=0$, в котором не разобран случай $Md=Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

**2.** На доске в строчку написаны двадцать троек. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 600. Сколько плюсов поставил Вася?

**Ответ:** 9 *плюсов.*

**Решение.** Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 3. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9.

Пример равенства с девятью плюсами: $333+33\cdot 8+3=600$.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 3 балла. Доказано, что других вариантов нет — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

**3.** Верно ли, что при любых $a$, $b$ и $c$ хотя бы одно из уравнений $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ имеет решение?

**Ответ:** *верно.*

**Решение.** Если хотя бы одно из чисел $a$, $b$, $c$ равно нулю, то по крайней мере одно из уравнений будет иметь корень $x=0$, и значит, утверждение верно. Рассмотрим случай, когда числа $a$, $b$, $c$ отличны от нулю.

Предположим, что все три квадратных уравнения не имеют решений, поэтому дискриминанты этих трёхчленов отрицательные, то есть справедливы неравенства:

$$b^2<ac,\quad c^2<ab,\quad a^2<bc.$$

Так как левые части всех неравенств — положительные, то правые части тоже положительные. Перемножив эти неравенства, получим противоречие: $a^2b^2c^2<a^2b^2c^2$.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Не разобран случай, когда одно из чисел $a$, $b$, $c$ равно нулю, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

**4.** В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

**Ответ:** 6 *игроков.*

**Решение.** Пусть в турнире принимали участие $d$ девочек и $5d$ мальчиков. Тогда всего игроков было $d+5d=6d$; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6d(6d-1)=6d(6d-1)$ партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно $6d(6d-1)$. Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек $\frac{1}{3}\cdot 6d(6d-1)=2d(6d-1)$ очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 5d=10d^2$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2\cdot\frac{1}{2}\cdot d(d-1)$ очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно $10d^2+d(d-1)=11d^2-d$. Значит,

$$2d(6d-1)\leqslant 11d^2-d \quad\Longleftrightarrow\quad d^2\leqslant d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой $6\cdot 5=30$ партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Подсчёт числа очков всех девочек — 2 балла. Оценка числа очков девочек — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

**5.** Угол $A$ ромба $ABCD$ равен $60^\circ$. Прямая, проходящая через точку $C$, пересекает отрезок $AB$ в точке $M$ и прямую $AD$ — в точке $N$. Докажите, что угол между прямыми $MD$ и $NB$ равен $60^\circ$. –

**Решение.** Обозначим через $K$ точку пересечения прямых $MD$ и $NB$ (рис. 4). Заметим, что треугольник $ABD$ равносторонний, $\angle BAD=\angle ABD=\angle BDA=60^\circ$. Из подобия треугольников $BMC$ и $AMN$, а также $MAN$ и $CDN$ следует

$$\frac{MB}{AB}=\frac{MC}{CN}, \qquad \frac{MC}{CN}=\frac{AD}{DN}.$$

Поскольку $AB=BD=AD$, имеем

$$\frac{MB}{BD}=\frac{MB}{AB}=\frac{MC}{CN}=\frac{AD}{DN}=\frac{BD}{DN}.$$

Треугольники $MBD$ и $BDN$ имеют равные углы: $\angle ABD=\angle BDA$ и прилегающие к ним пропорциональные стороны. Следовательно, треугольники $MBD$ и $BDN$ подобны. Поскольку углы между соответственными сторонами подобных треугольников равны, то углы $BDM$ и $DNB$ равны. Искомый угол $BKD$ – внешний угол треугольника $NKD$ – равен $\angle DNK+\angle KDN=\angle BDM+\angle KDN=60^\circ$.

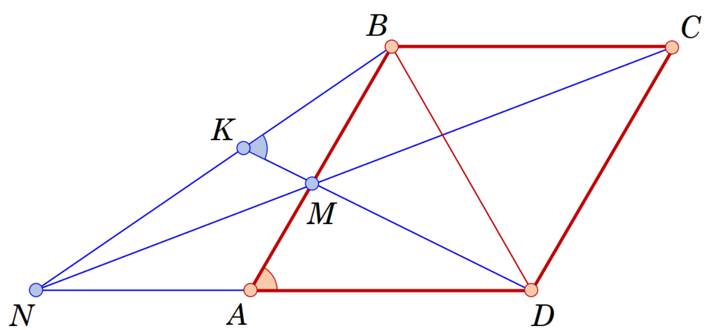


*Рис.* 4

**Критерии.** Отмечено подобие треугольников $BMC$ и $AMN$ (или $MAN$ и $CDN$) — 1 балл. Доказано подобие треугольников $MBD$ и $BDN$ — 4 балла. Получено равенство $\angle BDM=\angle DNB$ — 5 баллов. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.