

10 класс

10.1. На доске записали 20 первых чисел натурального ряда. Когда одно из чисел стёрли, то оказалось, что среди оставшихся чисел одно является средним арифметическим всех остальных. Найдите все числа, которые могли быть стёрты.

Ответ: 1 и 20.

Решение. Сумма первых двадцати чисел натурального ряда равна $(1 + 20) \cdot 10 = 210$. Следовательно, если одно из них стёрто, то сумма S оставшихся чисел удовлетворяет неравенству $190 \leq S \leq 209$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $S/19$. По условию, это – натуральное число, значит, S кратно 19. На отрезке $[190, 209]$ есть ровно два таких числа: 190 и 209. Если $S = 190$, то стерли число 20, а если $S = 209$, то стёрли единицу.

10.2. Для перевозки 80 тонн груза автомобилю потребовалось выполнить на 5 рейсов больше, чем для перевозки 40 тонн такого же груза. На всех рейсах за исключением, может быть, последнего в каждой перевозке автомобиль загружался полностью. Какие значения может принимать грузоподъемность автомобиля?

Ответ: $7\frac{3}{11} \leq x < 8\frac{8}{9}$.

Решение. Пусть x – грузоподъемность автомобиля, n – количество рейсов, которые потребовались для перевозки 40 тонн груза.

Рассмотрим 2 случая:

При перевозке 40 тонн в последнем рейсе машина была загружена не более половины, т. е. в $(n - 1)$ рейсе машина была загружена полностью, а последнем – меньше, чем на половину. Тогда для перевозки 80 тонн потребовалось $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ рейсов. По условию $2n - 1 - n = 5$, откуда $n = 6$. В этом случае: $5x < 40$, $5,5x \geq 40$, откуда $7\frac{3}{11} \leq x < 8$.

При перевозке 40 тонн в последнем рейсе машина была загружена более половины. Тогда перевозки 80 тонн потребовалось $2(n - 1) + 2 = 2n$. По условию $2n - n = 5, n = 5$. Тогда $4,5x < 40, 5,5x \geq 40$, откуда $8 \leq x < 8\frac{8}{9}$. Таким образом, $7\frac{3}{11} \leq x < 8\frac{8}{9}$.

Комментарий. Полностью рассмотрен 1 случай – 4 балла, 2 случай – 3 балла.

10.3. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 2, BC = 4, CD = 5$. Найдите его площадь, если известно, что он является одновременно и вписанным, и описанным.

Ответ: $2\sqrt{30}$.

Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ описанный, то $AB + CD = BC + AD$, откуда $AD = 3$. По теореме косинусов из треугольника ABD получим $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A$, а из треугольника BDC

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C.$$

Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$, и $\cos A = -\cos C$.

Следовательно,

$$2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos C = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos C.$$

Откуда $\cos C = \frac{7}{13}$, а $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{30}}{13}$. Так как $\sin A = \sin C$, то

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin A + \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin C = 2\sqrt{30}.$$

10.4. Найти $f(2021)$ если для любых действительных x и y справедливо равенство $f(x + f(y)) = x + y$.

Ответ: 2021.

Решение. Пусть $f(0) = b$, тогда при $y = 0$ получим $f(x + b) = x$, откуда $f(x) = x - b$. Таким образом,

$$f(x + f(y)) = f(x + (y - b)) = f(x + y - b) = x + y - b - b = x + y - 2b.$$

А так как $f(x + f(y)) = x + y$ для любых действительных x и y , то $b = 0$, то $f(x) = x$, и $f(2021) = 2021$.

Комментарий. Только пример функции $f(x) = x - 1$ балл.

10.5. В клетках таблицы расставлены числа 0 и 1, как показано на рисунке.

0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Разрешается:

- прибавлять единицу ко всем числам, стоящим в одной строке;
- прибавлять единицу ко всем числам, стоящим в одном столбце;
- прибавлять единицу ко всем числам, стоящим на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно прибавлять единицу к числу в любой угловой клетке).

Можно ли в результате нескольких таких действий получить таблицу, в которой все числа равны?

Ответ: нет.

Решение. Отметим в таблице 8 клеток (см. рис.).

	•	•	
•			•
•			•
	•	•	

Каждая строка и каждый столбец содержат по 2 отмеченных клетки, каждая диагональ – по 0 или 2. Поэтому чётность количества чётных чисел в отмеченных клетках не меняется. Следовательно, чётных чисел в этих клетках всегда будет нечётное число.