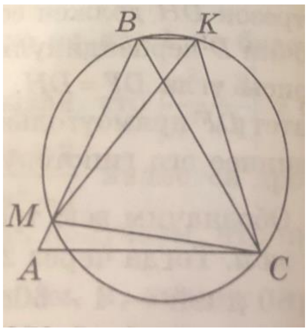
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап. Ответы и решения.

10 класс

10.1. Решение. Обозначим $2^{2021} = n$, тогда первое выражение $\frac{2^{2021}+1}{2^{2022}+1} = \frac{n+1}{2n+1}$, а второе $\frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1} = \frac{2n+1}{4n+1}$. Так как разность первого и второго выражений положительна, то первое число больше второго.

10.2. Решение.



Так как $\angle MBC = \angle MKC = 60°$, то через точки *M, K, B, C* можно провести окружность. Тогда $\angle KBC = \angle KMC = 60°$ (как вписанные). Поэтому $\angle BAC + \angle ABK = 60° + (60° + 60°) = 180°$, а значит, BK и AC параллельны.

10.3. Решение. По условию $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$, т.е. $\frac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$. Умножив обе части последнего равенства на $(a+b)(b+c)(a+c)$ и приведя подобные, получим $a^2 + c^2 = 2b^2$, что и требовалось доказать.

10.4. Решение. Пусть $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$ – рассматриваемые линейные функции. Так как $f(x)^3 - g(x)^3 = (a-c)x^3 + \cdots$, то $a = c$, иначе разность была бы кубической функцией. При этом $b \neq d$. Тогда $f(x)^3 - g(x)^3 = (b-d)(f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2)$. Заметим, что выражение $m^2 + mn + n^2 = (m + \frac{n}{2})^2 + \frac{3n^2}{4} \geq 0$, причем оно равно нулю только при $m = n = 0$; в то же время не существует точки x, в которой $f(x) = g(x) = 0$. Поэтому трехчлен $(b-d)(f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2)$ принимает значения одного знака, т.е. не имеет корней.

Замечание. То, что трехчлен не имеет корней, можно проверить, непосредственно вычислив его дискриминант.

10.5. Ответ. Не могут

Решение. Предположим, что это возможно и числа указанным образом разбиты на 18 четверок. Хотя бы в одной из четверок присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит, и всех произведений) делится на 9.

Поэтому произведение чисел в любой четверке делится на 9. Тогда в каждой четверке либо найдется число, делящееся на 9 (четверки 1-го типа), либо найдутся два числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 9 (четверки 2-го типа). Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 чисел, делящихся на 9, и ровно 16 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, имеется не более 8 четверок 1-го типа и не более 8 четверок 2-го типа, однако всего четверок 18 > 8 + 8. Противоречие.