Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.5, VIII.2 (где желательно хотя бы краткое обоснование). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность найденного решения (как в числовом ребусе), или тот факт, что найденное число является наименьшим возможным.

Задачи VII.1, VII.4, VIII.1, VIII.3, VIII.4, X.1, X.4, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.2 за верный ответ в решении числового ребуса, без обоснования единственности решения, присуждается 3 балла. То же самое касается задачи VII.3, если верный ответ указан, но не обоснован.

В задаче VIII.5 баллы даются только при наличии полного обоснования. За использование идеи раскраски можно давать 1 балл.

В задаче IX.1 за верную идею подсчёта можно давать до 3 баллов, если в вычислениях допущены ошибки. При этом, если у кого-то фигурирует допущение, что двузначное число может начинаться с нуля (что является грубой ошибкой), а всё остальное верно, даётся не более 1 балла.

В задаче IX.2 требуется полное обоснование ответа.

В задаче IX.3 за оба найденных варианта без обоснования можно давать до 3 баллов.

За верный ответ в задаче IX.4 можно давать до 2 баллов. Если разобран пример с 17 серединами, можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.5 за пример с 13 кораблями даётся 2 балла.

В задаче X.2 за верный пример (без обоснования) можно давать до 3 баллов.

В задачах X.3, XI.3 за верное нахождение двух пар корней можно присуждать до 3 баллов.

В задаче X.5 за попытки указать конкретную стратегию игры, но без полного и точного обоснования, баллы не присуждаются.

В задаче XI.1 баллы не присуждаются за использование приближённых вычислений с десятичными цифрами. Применение формул сокращённого умножения, с точным сравнением квадратных корней, вполне допустимо.

В задаче XI.2 годится любая логически обоснованная схема с двумя взвешиваниями.

За задачу XI.4 можно давать до 1 балла за полное рассмотрение одного или нескольких частных случаев (например, чисел, составленных из заданного набора цифр типа 1, 2, 3 с полным анализом всех остатков).

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

   Если на каком-то месте сидит рыцарь, то он сказал правду, и слева от него должен сидеть лжец. Обратно, если на каком-то месте сидит лжец, то слева от него сидит тот, кого неправильно назвали лжецом, то есть рыцарь. Это значит, что рыцари и лжецы за столом чередуются, то есть имеется по 6 тех и других.

2. Ответ: 29899856.

   Число имеет вид $100A+56$, где A делится на 7 и при этом чётно. Сумма цифр A равна 45. Достаточно указать наименьшее число с этими свойствами. Ясно, что оно как минимум шестизначно. Наименьшее чётное число с суммой цифр 45 равно 199998, но оно на 7 не делится. Следующие по величине такие числа начинаются цифрой 2, и на конце имеют 8, так как в противном случае сумма цифр будет меньше. Тогда другие цифры — это ещё одна цифра 8 и остальные девятки. Два следующих по величине варианта — это 289998 и 298998. Легко видеть, что первое из них не делится на 7, а второе делится, поэтому к нему и приписываем в конце 56.

3. Ответ: при $x \in \{1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}\}$.

   Пусть $y = \sqrt[3]{1+x}$, $z = \sqrt[3]{3-x}$. Тогда $y^3+z^3 = 4$. Положим $y+z = k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $k \neq 0$. Тогда $\frac{4}{k} = \frac{y^3+z^3}{y+z} = y^2 - yz + z^2 = (y+z)^2 - 3yz = k^2 - 3yz$, откуда $yz = \frac{k^3-4}{3k}$.

   Числа y, z оказываются корнями квадратного уравнения $t^2 - kt + \frac{k^3-4}{3k} = 0$. Его дискриминант равен $D = \frac{16-k^3}{3k} \geq 0$. Понятно, что k не может быть отрицательным, откуда $0 < k \leq \sqrt[3]{16}$, то есть $k = 1$ или $k = 2$.

   В первом случае y, z – корни уравнения $t^2 - t - 1 = 0$, где $x = t^3 - 1$. Ясно, что $t^2 = t+1$, $t^3 = t^2 + t = 2t+1$, то есть $x = 2t = 1 \pm \sqrt{5}$. Достаточно очевидно, что это даёт решения исходного уравнения.

   Во втором случае $t^2 - 2t + \frac{2}{3} = 0$, откуда $t^2 = 2t - \frac{2}{3}$, $t^3 = 2t^2 - \frac{2}{3}t = \frac{10t}{3} - \frac{4}{3}$. Корни имеют вид $t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, что даёт $x = t^3 - 1 = 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}$. Из общих соображений понятно, что найденные значения подходят (поскольку для них система от y, z даёт решение).

Итого решений в действительных числах получается четыре.

4. Используем известное свойство биссектрисы треугольника: она делит противолежащую сторону в отношении, равном отношению длин боковых сторон. Напомним, что этот факт можно вывести либо при помощи подобия треугольников, либо из сравнения отношений площадей двух треугольников с общей стороной, равной отрезку биссектрисы.

   Из этого свойства вытекает, что каждое из отношений AB/BK и AC/CK равно $x = AL/LK$. Поэтому $AB+AC = x\cdot(BK+CK) = x\cdot BC$, то есть $x = \frac{AB+AC}{BC} > 1$ в силу неравенства треугольника. Это значит, что $AL > LK$.

5. Ответ: выигрывает Петя.

   Рассмотрим ту же игру, но с цифрами от 2 до 9. Она длится конечное число ходов, ничьих не бывает. Значит, у одного из игроков в ней есть выигрышная стратегия.

   Рассмотрим случай, когда в новой игре побеждает тот, кто в ней начинает. Тогда он первым ходом называет некоторую цифру $a \neq 1$, и далее побеждает. Тогда Пете достаточно в исходной игре назвать это же число a. Единица делит любое число, её далее называть нельзя, то есть игра протекает точно так же, как предыдущая. Поэтому Петя побеждает.

   Теперь рассмотрим случай, когда в новой игре начинающий проигрывает. Тогда Петя в исходной игре называет число 1. Далее игра продолжается точно так же, как и игра с цифрами от 2 до 9, но в ней уже первый ход делает Вася. Поэтому он проигрывает, а Петя побеждает.

   Заметим, что стратегия правильной игры здесь сходу не известна: доказывается лишь факт её существования. Анализ игры, проведённой при помощи компьютера, показывает, что выигрывает любой из трёх начальных ходов Пети: он может назвать либо 2, либо 5, либо 7. Но сама инструкция игры достаточно сложная.